Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 517.9 (043) На правах рукописи

Артыкбаева Жанар Нурланкызы

Спектральный анализ самосопряжённых дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами

8D05401-Математика

Диссертация на соискание степени доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Кангужин Б.Е.

Зарубежный научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Романовский В.Г.

Республика Казахстан
Алматы, 2026

Содержание

Введение 4
1. Дифференциально-граничные уравнения с алгебраическими членами. 12
1.1. Постановка и однозначная разрешимость краевых задач для дифференциально-алгебраических операторов 12
1.2. Доказательства результатов пункта 1.1. 15
1.3. Структура обратного оператора. 21
1.4. Примеры. 23
2. Эквивалентные граничные условия для дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами. 28
2.1. Постановка краевой задачи для дифференциально-алгебраического уравнения с граничными членами 28
2.2. Граничные условия и их эквивалентные формулировки 29
2.3. Доказательства результатов пункта 2.2. 33
3. Самосопряженные дифференциально-алгебраические операторы с граничными членами. 37
3.1. Сопряженные операторы к дифференциально-алгебраическим операторам с граничными членами. 38
3.2. Пример 1. Случай распадения оператора на дифференциальный и матричный операторы. 41
3.3. Пример 2. Случай слабого граничного взаимодействия дифференциального и матричного операторов. 41
3.4. Пример 3. Случай слабого алгебраического взаимодействия дифференциального и матричного операторов. 42
3.5. Обоснование и доказательства результатов пункта 3.1. 43
3.6. Представление резольвенты. 45
3.7. Пример 4 (продолжение примера 1). Представление резольвенты в случае распадения оператора на дифференциальный и матричный операторы. 55
3.8. Пример 5. (продолжение примера 2) Представление резольвенты в случае слабого граничного взаимодействия дифференциального и матричного операторов. 57
3.9. Аналитические свойства резольвенты. 59
3.10. Пример 6 (продолжение примера 4). Представление собсвенных векторов в случае распадения оператора на дифференциальный и матричный операторы. 66
3.11. О базисности Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. 67
4. Заключение 73
5. Приложения. 74
Список использованных источников 79

Нормативные ссылки

В данной диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСТ 7.1-84. стандарт по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическое описание документа. Общие требования и правила составления.

ГОСТ 7.9-95 (ISO 214-76). Стандарты по информации, библиотечному и издательскому делу. Реферат и аннотация. Общие требования.

ГОСТ 7.12-93. Стандарты по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая запись. Сокращение слов на русском языке. Общие требования и правила.

ГОСТ 8.417-81. Государственная система обеспечения единства измерений.

Введение

Дифференциально-алгебраические уравнения с краевыми условиями играют ключевую роль в современных исследованиях как в теоретической, так и в прикладной математике. Они широко применяются для моделирования динамических систем, в которых наряду с дифференциальными соотношениями присутствуют алгебраические связи. Одной из центральных задач в этой области является изучение существования, единственности решений таких систем при различных типах краевых условий.

Актуальность исследования и обзор литературы. Анализ систем дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами в рамках современных исследований опирается на сочетание дифференциальных и алгебраических методов, а также на применение операторного аппарата при изучении их основных свойств. При этом классические методы спектрального анализа дифференциальных операторов не всегда позволяют учесть влияние алгебраических и граничных членов на структуру решений и спектр. Актуальность темы определяется необходимостью более глубокого исследования свойств дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами, включая вопросы самосопряжённости, базисности системы собственных и присоединённых функций и аналитических свойств резольвенты, что важно для развития теории операторов и прикладных задач математической физики. Интенсивное развитие теории дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) началось во второй половине XX века под влиянием задач, возникающих в механике и моделировании электрических цепей. Существенную роль в формировании данной области сыграли работы [1,2], а также монография [3], в которых были систематически изложены основные положения аналитической и численной теории дифференциально-алгебраических систем. В этих исследованиях подробно рассмотрены вопросы, связанные с структурой ДАУ, а также условия существования и единственности решений задач начального значения. Взаимодействие моделирования и математического анализа особенно важно в этой области, и заинтересованный читатель может обратиться к работам [4] как к основным источникам. Между 1989 и 1996 годами теория и численный анализ ДАУ переживали период бурного развития, и многие группы в области математики и инженерии начали исследовать эту новую научную тему. Читателей, которые хотят узнать больше о теме ДАУ и о

богатом наследии, накопившемся за годы, можно направить к монографиям [5,6,7], а также к обзору [8]. В годы развития дифференциально-алгебраических уравнений регуляризация была достаточно популярным методом преобразования алгебраической части в дифференциальное уравнение. При этом фундаментальной основой их построения остаются классические дифференциальные уравнения, традиционно применяемые для описания физических процессов во времени [9, 10]. Однако во многих практических ситуациях динамика системы определяется не только законами движения, но и дополнительными ограничениями на допустимые состояния. В таких случаях математическая модель неизбежно включает алгебраические соотношения, отражающие наложенные связи. Существенным источником возникновения дифференциально-алгебраических систем служат процедуры перехода от непрерывных математических моделей к их дискретизированным аналогам. В частности, такие системы естественным образом формируются при исследовании сложных взаимосвязанных моделей, объединяющих уравнения в частных производных с уравнениями иных типов [11–14]. Особая значимость дифференциально-алгебраических уравнений проявляется в тех областях, где исследуются вырождающиеся динамические модели и системы с наложенными связями. Не менее существенным является их применение в теории управления, поскольку современные математические модели управляемых объектов часто обладают смешанной структурой: закономерности в них дополняются алгебраическими условиями, выражающими внутренние или внешние ограничения. Таким образом, рассматриваемый класс уравнений играет ключевую роль как при изучении предельных режимов динамических процессов, так и при моделировании управляемых систем со связями различной природы [15–20].

Дальнейшее развитие теории ДАУ получила в трудах [21-24], предложивших современные операторные методы анализа линейных и нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений. Их подход позволил установить глубокие связи между свойствами ДАУ и теорией дифференциальных операторов, а также обобщённых обратимых операторов, что значительно расширило возможности строгого функционально-аналитического исследования таких систем.

Область дифференциальных уравнении с граничными условиями, так называемые дифференциально-граничные уравнении, рассматривается в обзоре с 1900 года до настоящего времени, с особым акцентом на последние

достижения. В данной области одними из первых были проведены исследования, непосредственно связанные с дифференциально-граничными операторами, которые привели к более строгому пониманию природы рассматриваемых уравнений [25]. Были изучены методы, основанные на рассмотрении минимальных и максимальных операторов, а также их диссипативных расширений, что напрямую связано с понятием дифференциально-граничных уравнений. В работе [26] исследуются максимально диссипативные операторы, что указывает на необходимость расширения дифференциальных операторов до дифференциально-граничных. И оно приводит к осознанию того, что в ряде случаев дифференциальные операторы переходят в дифференциально-граничные операторы**,** то есть содержат как дифференциальную часть, так и операторы на границе. Дифференциально-граничные задачи не являются задачами для чисто дифференциальных уравнений [27]. Предложенный подход в работах [28-33] оказал значительное влияние на дальнейшее развитие операторной теории краевых задач и послужил теоретической основой для исследования более сложных моделей, включающих алгебраические и граничные члены. Граничные задачи составляют важную область прикладной математики для явно заданных обыкновенных дифференциальных уравнений см., например, [34-44]. Это утверждение тем более справедливо для дифференциально-алгебраических уравнений. Работы [34, 36], в основном сосредотачивает внимание на краевых задачах с двумя граничными условиями. Первые целенаправленные исследования краевых задач для дифференциально-алгебраических систем были связаны с вопросами регуляризации и согласования граничных условий. В рамках этих работ анализировались линейные ДАУ с классическими краевыми условиями, а также устанавливались условия корректности постановки задач. Однако, как правило, алгебраические соотношения в таких моделях не включались непосредственно в граничные члены, что сужало область применимости полученных результатов.

Параллельно с развитием теории ДАУ формировалась теория краевых задач для дифференциально-операторных уравнений. В этой области были получены фундаментальные результаты, касающиеся расширений операторов, их самосопряжённости и спектральных характеристик. Работы [45, 46] обеспечили значимое продвижение в развитие операторного подхода к краевым задачам. В классических работах М. А. Наймарка [47] и в последующих исследованиях подробно изучались самосопряжённые

расширения дифференциальных операторов с граничными условиями, что имеет ключевое значение для построения спектральной теории. Существенный вклад в развитие спектрального анализа дифференциальных операторов и краевых задач внесён в работах [48-55]. Эти исследования охватывают широкий круг задач, связанных с изучением спектральных свойств операторов, заданных дифференциальными выражениями с различными типами граничных условий. Важным аспектом спектрального анализа в этих работах является использование резольвентных методов и связанных с ними интегральных представлений. А работы [55-57] формируют целостный подход к спектральному анализу дифференциальных операторов с граничными условиями и особенностями. Полученные результаты создают методологическую основу для дальнейших исследований в области краевых задач и спектральной теории и непосредственно связаны с современными задачами анализа дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами.

Научная новизна диссертационного исследования. В диссертационной работе получены результаты, относящиеся к спектральному анализу дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами.

1. Рассмотрен класс дифференциально-алгебраических операторов, в которых дифференциальная часть дополняется алгебраическими и граничными членами. Предложена постановка краевых задач, позволяющая корректно определить соответствующие самосопряжённые операторы.
2. Исследованы условия самосопряжённости дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами в рамках рассматриваемых операторных моделей. Показано, что выбор граничных условий оказывает существенное влияние на операторные свойства.
3. Выполнен спектральный анализ самосопряжённых дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами для исследуемого класса задач.
4. Исследованы вопросы базисности Рисса системы собственных и присоединённых функций самосопряжённых дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами.
5. Получено представление резольвенты самосопряжённых дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами и проанализированы её аналитические свойства в зависимости от спектрального параметра.

Таким образом, в диссертации систематизированы и развиты результаты, касающиеся спектрального анализа дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами. Рассматриваемые в главах 1–3 спектрально-операторные задачи для дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами ранее систематически не изучались. Полученные в диссертационной работе результаты, касающиеся аналитической природы резольвенты и структуры корневых систем соответствующих операторов, обладают самостоятельной научной значимостью.

Объектом исследования в настоящей диссертационной работе является класс дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами, а также линейные операторы, порождаемые этими уравнениями в функциональных пространствах.

Предмет исследования составляют спектральные характеристики и операторные свойства дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами, включая анализ условий самосопряжённости, описание областей определения соответствующих операторов, а также структура собственных и присоединённых функций, и условия базисности Рисса. Исследование сосредоточено на установлении взаимосвязи между алгебраическими ограничениями, граничными членами и спектральными свойствами соответствующих операторов, что позволяет рассматривать изучаемые задачи в единой постановке.

Основная цель диссертационного исследования. Целью диссертационного исследования является систематическое изучение дифференциально-граничных и дифференциально-алгебраических уравнений с алгебраическими и граничными членами, формулировка и исследование соответствующих самосопряжённых операторов, а также анализ их спектральных свойств, включая базисность Рисса системы собственных и присоединённых функций и аналитические характеристики резольвенты.

Задачи исследования. Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1. Изучить дифференциально-граничные и дифференциально-алгебраические уравнения с алгебраическими и граничными членами и предложить корректные постановки краевых задач.
2. Исследовать условия самосопряжённости операторов, порождённых рассматриваемыми уравнениями, и их связь с решениями краевых задач.
3. Провести спектральный анализ самосопряжённых дифференциально-алгебраических операторов.
4. Исследовать базисность Рисса системы собственных и присоединённых функций для выбранного класса операторов.

5. Получить представление резольвенты операторов и проанализировать её аналитические свойства.

Связь диссертационной работы с научно-исследовательскими проектами:

Диссертационная работа выполнялась в период участия автора в ряде научно-исследовательских проектов, финансируемых Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан:

проект № AP22783101 на тему “Задачи идентификации зависящих от времени коэффициентов в уравнениях диффузии с дробной производной по времени и нелокальными граничными условиями”;

проект AP23485971 на тему “Параболическое уравнение с дробной производной по времени и двумерным оператором Гамильтониана: задача начального значения и задачи определения коэффициентов”.

Положения, выносимые на защиту:

1. Сформулирована корректная постановка краевых задач для класса дифференциально-алгебраических уравнений, включающих граничные компоненты, и разработан операторный аппарат их исследования.
2. Установлено строение резольвент соответствующих дифференциально-граничных операторов и получены результаты, описывающие их аналитические природы.
3. Доказано, что резольвенты рассматриваемых операторов допускают мероморфное продолжение по спектральному параметру, а также исследована структура их особенностей.
4. Построены спектральные проекторы, отвечающие инвариантным собственным подпространствам указанных операторов, и изучены их основные свойства.
5. Описаны условия самосопряжённости для дифференциально-граничных операторов с алгебраическими членами и выявлена их связь с задачами на собственные значения.
6. Доказано теорема, где система собственных и присоединённых функций образует базис Рисса.

Структура диссертационной работы. Настоящая диссертационная работа включает раздел с нормативными правовыми ссылками, вводную часть, три содержательные главы, каждая из которых разбита на отдельные подразделы, а также итоговое обобщение результатов, приложение и библиографический перечень использованных источников. Общий объём выполненного исследования равен 86 страницам.

Достоверность и обоснованность результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечиваются последовательным применением методов функционального анализа и спектральной теории линейных операторов, адекватных исследуемому классу дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами. Корректность выводов подтверждается публикацией основных результатов в рецензируемых научных изданиях, а также их отражением в материалах международных научных конференций.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертационной работе, получили профессиональное обсуждение в рамках международных научных конференций и научных семинаров, включая конференции, проводившиеся за рубежом:

-международная научная конференция студентов и молодых ученых “Фараби Алеми” (Алматы, 2020),

-“Традиционная международная апрельская научная конференция в честь Казахстанского дня работников науки” (Алматы, 2023),

-“Уфимская осенняя математическая школа—2024” международная конференция, (Уфа, 2024),

-международная научная конференция студентов и молодых ученых “Фараби Алеми” (Алматы, 2024),

-“Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании” международная научно-практическая конференция (Ош, 2024),

-Seventh International Conference on Analysis and Applied Mathematics (Antalya, 2024),

-International Conference “Actual problems of analysis, differential equations and algebra” (Astana, 2025),

-15th ISAAC Congress (Astana, 2025),

-“Традиционная международная апрельская научная конференция в честь Казахстанского дня работников науки” (Алматы, 2025),

-International Conference FAIA, (Antalya, 2025),

-Международная научная конференция, “Актуальные вопросы междисциплинарных научных исследований”, (Караганда, 2025),

-International Conference AIP, (Рио-де-Жанейро, 2025),

-“9th Young Scholar Symposium of the East Asia Section of Inverse Problems International Association”, (Киото, 2025),

-Trends in Analysis and Differential Equations (Turkistan, 2026).

Публикации. Основные достижения исследования отражены в пяти статьях и одинадцати тезисах, включённых в работы [72, 73]–[85-98]. Из них

две статьи относятся к квартилю Q1 в базе данных Scopus: первая статья имеет процентиль 81, а вторая — 93.

1. Дифференциально-граничные уравнения с алгебраическими членами.

1.1. Постановка и однозначная разрешимость краевых задач для дифференциально-алгебраических операторов

Исследуется уравнение с дифференциальными и алгебраическими компонентами, определённое на интервале $0 < x < 1$

$$l(y, \vec{\lambda}) \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x)}{dx} + \sum_{i=1}^{k} h_i(x)U_i(y) + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j q_j(x)\right)$$

$$+r_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + r_0(x)y(x) = f(x), \qquad (1.1)$$

где $r_k \in C^{(k)}[0,1], k = 0,1,$

$\{h_1(\cdot), \dots, h_k(\cdot)\}$ и $\{q_1(\cdot), \dots, q_s(\cdot)\}$ - наборы функций, выбранные произвольно.

Представление граничных функционалов может быть записано следующим образом:

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{ij}y^{(j-1)}(0) + \beta_{ij}y^{(j-1)}(1)\right), i = 1, \dots, k, \qquad (1.2)$$

здесь α_{ij}, β_{ij} – произвольно выбираемые комплексные константы.

Выбираемые наборы функций

$$\{h_1(\cdot), \dots, h_k(\cdot);\ \ q_1(\cdot), \dots, q_s(\cdot)\}$$

подбираются таким образом, что для любой функции $f \in L_2(0,1)$ уравнение (1.1) имеет хотя бы одно решение

$$\{y(x), \qquad x \in (0,1);\ \lambda_1, \dots, \lambda_s\}$$

из рассматриваемого класса. Поскольку количество таких решений бесконечно, возникает вопрос: какие дополнительные ограничения необходимо ввести, чтобы обеспечить единственность решения для любого $f \in L_2(0,1)$?

Для удобства выражение $l\left(y,\vec{\lambda}\right)$ трактуется как линейное отображение в пространстве $L_2(0,1)\times\mathbb{C}^s$. При этом оно не определено на всём пространстве, а лишь там, где корректно задаётся левая часть уравнения (1.1). Под множеством всех наборов

$$\{y(x),\qquad x\in(0,1);\ \lambda_1,\dots,\lambda_s\}$$

для которых корректно реализуется отображение

$$(y(x),x\in(0,1);\ \lambda_1,\dots,\lambda_s)\xrightarrow{\Lambda_{max}} l\left(y,\vec{\lambda}\right),\forall x\in(0,1)$$

понимается область определения максимального оператора Λ_{max}, которая обозначается как $D(\Lambda_{max})$:

$$D(\Lambda_{max})=\{w=(y(x),x\in(0,1);\ \lambda_1,\dots,\lambda_s):$$

$$y(x),y'(x)+\sum_{i=1}^{k}U_i(y)h_i(x)+\sum_{j=1}^{s}\lambda_j q_j(x);\ l\left(y,\vec{\lambda}\right)\in L_2(0,1);$$

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_s)\in\mathbb{C}^s\}\subset L_2(0,1)\times\mathbb{C}^s.$$

Подчеркнём, что

$$\Lambda_{max}w=f(x) \tag{1.3}$$

при произвольной правой части $f\in L_2(0,1)$ обладает бесконечным числом решений в $D(\Lambda_{max})$. Отсюда вытекает необходимость целенаправленного сужения области $D(\Lambda_{max})$ таким образом, чтобы в выбранной суженной области уравнение (1.3) для $\forall f\in L_2(0,1)$ обладало единственным решением. Далее зафиксируем обозначение D для специально выделенной суженной области, предполагая при этом, что $D\subset D(\Lambda_{max})$. Зададим оператор Λ, как сужение Λ_{max} на D, другими словами, на D действие Λ тождественно действию Λ_{max}. D подбирается таким образом, чтобы для Λ существует обратный оператор Λ^{-1} на всем $L_2(0,1)$. В связи с этим сужение Λ, в рамках подхода [58], принято называть всюду разрешимым сужением. Основная задача заключается в детальном описании всех возможных всюду разрешимых линейных сужений Λ_{max}.

Через $y_1(x)$ и $y_2(x)$ обозначим решения однородного дифференциального уравнения с начальными условиями в нуле

$$y''(x)+r_1(x)y'(x)+r_2(x)y(x)=0,x\in(0,1),$$

$$y_1(0)=1,\qquad y_2(0)=0,$$

$$y'_1(0) = 0, \qquad y'_2(0) = 1.$$

Лемма 1.1. Пусть $h_i \in W_2^1[0,1]$ при $i = 1, \dots, k$ и $q_j \in W_2^1[0,1]$ при $j = 1, \dots, s$, а граничные формы $U_1(\cdot), \dots, U_k(\cdot)$ выбраны в виде (1.2). Тогда для любого $f \in L_2(0,1)$ следующая задача

$$\begin{cases} l\left(y, \vec{\lambda}\right) = f(x), \ \ 0 < x < 1, & (1.4) \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0, \ \ \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_s = 0 & (1.5) \end{cases}$$

однозначно разрешима тогда и только тогда, когда однозначно разрешимо следующее уравнение

$$y(x) + \sum_{i=1}^{k} U_i(y) \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} dh_i(t) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} f(t) dt. \quad (1.6)$$

В дальнейшем через $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_{s+2}(x)$ будет обозначать произвольный набор функций, каждая из которых принадлежит пространству $L_2(0,1)$.

Полное описание всех возможных всюду разрешимых линейных сужений дано в следующем утверждении.

Теорема 1.1. Пусть $h_i \in W_2^1[0,1]$ при $i = 1, \dots, k$ и $q_j \in W_2^1[0,1]$ при $j = 1, \dots, s$, а граничные формы $U_1(\cdot), \dots, U_k(\cdot)$ выбраны в виде (1.2). Тогда

(i) для любого $f \in L_2(0,1)$ следующая задача

$$l\left(y, \vec{\lambda}\right) = f(x), \ \ 0 < x < 1,$$

$$\begin{cases} y(0) = \int_0^1 l(y)\overline{\sigma_1(x)}\, dx, \\ y'(0) = \int_0^1 l(y)\overline{\sigma_2(x)}\, dx, \\ \lambda_1 = \int_0^1 l(y)\overline{\sigma_3(x)}\, dx, \\ \cdots \\ \lambda_s = \int_0^1 l(y)\overline{\sigma_{s+2}(x)}\, dx. \end{cases} \quad (1.7)$$

однозначно разрешима в $D(\Lambda_{max})$ тогда и только тогда, когда однозначно разрешимо следующее уравнение относительно $y(x)$

$$y(x)+\sum_{i=1}^{k}U_i(y)\int_0^x\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1(x) & y_2(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}dh_i(t)$$

$$=y_1(x)\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_1(t)}\,dt+y_2(x)\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_2(t)}\,dt$$

$$+\int_0^x\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1(x) & y_2(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}f(t)dt-$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\int_0^1 f(t)\overline{\overline{\sigma_{j+2}(t)}}\,dt\int_0^x\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1(x) & y_2(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}dq_j(t). \qquad (1.8)$$

Здесь $\sigma_1(x),\sigma_2(x),\dots,\sigma_{s+2}(x)$ произвольный набор из $\prod_{i=1}^{s+2}L_2\,(0,1)$.

(ii) Обратно, пусть $\Lambda-$ произвольное всюду разрешимое линейное сужение максимального оператора Λ_{max}, причем $\|\Lambda^{-1}f\|_{L_2(0,1)}\le C\|f\|_{L_2(0,1)}$. Тогда существует единственный набор $\sigma_1(x),\sigma_2(x),\dots,\sigma_{s+2}(x)$ набор из $\prod_{i=1}^{s+2}L_2\,(0,1)$ такой, что область определения D_Λ сужения Λ имеет вид

$$D_\Lambda=\{w=(y(x),x\in(0,1);\lambda_1,\dots,\lambda_s)\in D_{\Lambda_{max}}:$$

а также выполняются условия (7)для набора $\sigma_1(x),\sigma_2(x),\dots,\sigma_{s+2}(x)\}$.

Таким образом, теорема 1.1 дает полное описание всевозможных всюду разрешимых линейных сужений максимального оператора Λ_{max}, которые параметризуются набором функций $\sigma_1(x),\sigma_2(x),\dots,\sigma_{s+2}(x)$. В действительности, теорема 1.1 является следствием результатов и конструкции работ [59-63].

1.2. Доказательства результатов пункта 1.1.

Доказательство леммы 1.1.

При предположениях леммы 1.1 уравнение (1.1) примет вид

$$l(y) \equiv \frac{d^2y(x)}{dx^2} + r_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + r_0(x)y(x) + \sum_{i=1}^{k} U_{i1}(y)\frac{dh_i(x)}{dx} = f(x), \quad (1.9)$$

$$0 < x < 1,$$

где $U_{i1}(y) = \sum_{j=1}^{2} \beta_{ij} y^{(j-1)}(1)$.

Решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + r_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + r_0(x)y(x) = F(x), 0 < x < 1$$

с условиями Коши в нуле

$$y(0) = 0, \qquad \frac{dy(0)}{dx} = 0$$

имеет вид

$$y(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} F(t)dt, \quad 0 < x < 1. \qquad (1.10)$$

Убедимся, что правая часть соотношения (1.10) является решением уравнения. Действительно,

$$y'(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} F(t)dt,$$

$$y''(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ -r_1(x)y_1'(x) - r_0(x)y_1(x) & -r_1(x)y_2'(x) - r_0(x)y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} F(t)dt,$$

Отсюда убеждаемся, что справедливо уравнение

$$y''(x) + r_1(x)y'(x) + r_0(x)y(x) = F(x), \qquad 0 < x < 1\,.$$

Из формулы (1.10) следует, что решение уравнения (1.9) с нулевыми условиями Коши в нуле имеет вид

$$y(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} f(t)dt - \sum_{i=1}^{k} U_{i1}(y) \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} dh_i(t).$$

Таким образом, лемма 1.1 доказана. На самом деле, разрешимость уравнения (1.6) может быть исследована следующим образом. Применим к обеим частям равенства (1.6) формы $U_{j1}(\cdot)$. В результате вытекает система линейных алгебраических уравнений

$$U_{j1}(y) + \sum_{i=1}^{k} U_{i1}(y)U_j(H_i) = U_{j1}(F_3),\ j = 1, \dots, k, \tag{1.11}$$

где $$H_i(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} dh_i(t),$$

$$F_3(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} f(t)dt.$$

Введем обозначения

$$\mathcal{H}_3(x, F_3) = \begin{vmatrix} H_1(x) & H_2(x) & \cdots & H_k(x) & F_3(x) \\ 1 + U_{11}(H_1) & U_{11}(H_2) & \cdots & U_{11}(H_k) & U_{11}(F_3) \\ U_{21}(H_1) & 1 + U_{21}(H_2) & \cdots & U_{21}(H_k) & U_{21}(F_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{k1}(H_1) & U_{k1}(H_2) & \cdots & U_{k1}(H_k) & U_{k1}(F_3) \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + U_{11}(H_1) & U_{11}(H_2) & \cdots & U_{11}(H_k) \\ U_{21}(H_1) & 1 + U_{21}(H_2) & \cdots & U_{21}(H_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{k1}(H_1) & U_{k1}(H_2) & \cdots & 1 + U_{k1}(H_k) \end{vmatrix}.$$

Разрешив систему (1.11) и подставив в (1.6), получим решение (1.6) в виде

$$y(x) = (-1)^k \frac{\mathcal{H}_3(x, F_3)}{\Delta}. \tag{1.12}$$

Таким образом, для однозначной разрешимости уравнения (1.6) достаточно потребовать условие $\Delta \neq 0$.

Доказательство теоремы 1.1 (первого пункта (i)).

Теперь перейдем к доказательству первого пункта (i) теоремы 1.1. Для этого (доказательства теоремы 1.1) достаточно доказать следующее утверждение.

Теорема 1.2. Пусть $h_i \in W_2^1[0,1]$ при $i = 1, \dots, k$ и $q_j \in W_2^1[0,1]$ при $j = 1, \dots, s$, а граничные формы $U_1(\cdot), \dots, U_k(\cdot)$ выбраны в виде (1.2). Тогда для любого $f \in L_2(0,1)$ и любых числах $y_0, y_1, a_1, \dots, a_s$ следующая задача

$$l(y) = f(x), \;\; 0 < x < 1,$$

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1, \qquad \lambda_j = a_j, \qquad j = 1, \dots, s$$

однозначно разрешима в $D(\Lambda_{max})$ тогда и только тогда, когда однозначно разрешимо следующее уравнение относительно $y(x)$

$$y(x) + \sum_{i=1}^{k} U_i(y) \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} dh_i(t) =$$

$$= y_0 \cdot y_1(x) + y_1 \cdot y_2(x) + \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} f(t)dt -$$

$$- \sum_{j=1}^{s} a_j \cdot \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} dq_j(t).$$

Заметим, что из теоремы 1.2. сразу же следует теорема 1.1. Для этого достаточно в качестве $y_0, y_1, a_1, \dots, a_s$ выбрать линейные непрерывные функционалы над $L_2(0,1)$. По-другому говоря, считаем их линейными ограниченными функционалами

$$y_0{=}y_0(f), y_1 = y_1(f), a_1 = a_1(f), \dots, a_s = a_s(f),$$

над пространством $L_2(0,1)$. Тогда по теореме Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала над $L_2(0,1)$ имеем

$$y_0(f) = \int_0^1 f(x)\overline{\sigma_0(x)}\, dx,$$

$$y_1(f) = \int_0^1 f(x)\overline{\gamma_1(x)}\, dx,$$

$$a_j(f) = \int_0^1 f(x)\overline{\sigma_j(x)}\, dx, \qquad j = 1, \dots, s,$$

где $\sigma_j \in L_2(0,1), \sigma_0 \in L_2(0,1), \gamma_1 \in L_2(0,1)$. Отсюда вытекает справедливость теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.2. Согласно принципу суперпозиции достаточно доказать теорему 1.2 при $f(x) = 0$. Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$l(y, \vec{\lambda}) \equiv \frac{d^2y(x)}{dx^2} + r_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + r_0(x)y(x) + \sum_{i=1}^{k} U_{i1}(y)\frac{dh_i(x)}{dx} =$$

$$-\sum_{i=1}^{k} U_{i0}\frac{dh_i(x)}{dx} - \sum_{j=1}^{s} a_j \frac{dq_j(x)}{dx},\ 0 < x < 1, \qquad (1.13)$$

где $U_{i1}(y) = \sum_{j=1}^{2} \beta_{ij} y^{(j-1)}(1),\quad U_{i0} = \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} y_{j-1}$.

Решение неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + r_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + r_0(x)y(x) = F(x), 0 < x < 1$$

с условиями Коши в нуле

$$y(0) = y_0, \qquad \frac{dy(0)}{dx} = y_1$$

имеет вид

$$y(x) = y_0 \cdot y_1(x) + y_1 \cdot y_2(x) + \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} F(t)dt,\ 0 < x < 1. \qquad (1.14)$$

Положим $F(t) = -\sum_{i=1}^{k} U_{i1}(y)\frac{dh_i(x)}{dx} - \sum_{i=1}^{k} U_{i0}\frac{dh_i(x)}{dx} - \sum_{j=1}^{s} a_j \frac{dq_j(x)}{dx}$, тогда соотношение (1.14) дает решение уравнения (1.13). Отсюда вытекает справедливость теоремы 1.2 при $f(x) = 0$.

Доказательство теоремы 1.1 (второго пункта (ii)).

Теперь перейдем к доказательству второго пункта (ii) теоремы 1.1.

Предположим, что к неоднородному уравнению (1.1) добавлены $\Sigma -$ некоторые дополнительные линейные условия так, что уравнение (1.1) с добавленными условиями при любой $f \in L_2(0,1)$ имеет единственное решение

$$w = (y(x), x \in (0,1);\ \lambda_1, \dots, \lambda_s) \in W_2^2(0,1) \times \mathbb{C}^s. \qquad (1.15)$$

Из теоремы вложения следует, что $y(x)$ и $y'(x)$ −абсолютно непрерывные функций на отрезке $[0,1]$. Следовательно, для любого $f \in L_2(0,1)$ однозначно определяются значения $y(0)$ и $y'(0)$. Таким образом, $y(0)-$ представляет линейный функционал над пространством $L_2(0,1)$, поскольку его значения могут линейно изменяться вместе с выбором функций $f(x)$ из $L_2(0,1)$. Обозначим сужение Λ_{max} на область определения

$D = \{w = (y(x), x \in (0,1);\ \lambda_1, \dots, \lambda_s) \in D(\Lambda_{max}): y(x)$ −удовлетворяет условиям $\Sigma\}$ через Λ_Σ. Из условий теоремы 1.1 следует, что $\Lambda_\Sigma^{-1}-$ ограниченный в $L_2(0,1)$ оператор. Поэтому выполняются априорные оценки

$$|y(0)| + |y'(0)| + \sum_{j=1}^{s}|\lambda_j| \le C\,\|f\|_{L_2(0,1)}. \tag{1.16}$$

Следовательно, из оценки (1.16) следует, что $y(0)$ является линейным ограниченным функционалом над пространством $L_2(0,1)$. Тогда по теореме

Ф. Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в пространстве $L_2(0,1)$ следует существование единственного (для данного функционала) элемента $\sigma_1 \in L_2(0,1)$ такого, что

$$y(0) = \int_0^1 f(x)\overline{\sigma_1(x)}\,dx. \tag{1.17}$$

Аналогично устанавливаются представления

$$\begin{cases} y'(0) = \int_0^1 f(x)\overline{\sigma_2(x)}\,dx\,, \\ \lambda_j = \int_0^1 f(x)\overline{\sigma_{j+2}(x)}\,dx, j = 1, \dots, s. \end{cases} \tag{1.18}$$

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение (1.1) с дополнительными условиями (1.17) и (1.18), предварительно $f(x)$ заменив на $l(y, \vec{\lambda})$. Согласно пункту (ii) теоремы 1.1 эта задача имеет единственное решение, которое совпадает с решением w из (1.15). Отсюда следует эквивалентность условии (1.17) и (1.18) с дополнительными условиями Σ. Второй пункт теоремы 1.1 полностью доказан.

1.3. Структура обратного оператора.

Пусть к уравнению (1.1) добавлены условия (1.7). Согласно теореме 1.1 такая краевая задача однозначно разрешима при всех $f \in L_2(0,1)$, если $\Delta \neq 0$. В данном пункте по $f \in L_2(0,1)$ вычислим указанное решение $y(x)$. Иначе говоря, вычислим обратный оператор, соответствующий уравнению (1.1) с условиями (1.7).

Согласно принципу суперпозиции решение задачи (1.1)-(1.7) ищем в виде

$$y(x) = y_3(x) + y_4(x),$$

где $y_3(x)$ - решение задачи из леммы 1, $y_4(x)$ – решение следующей задачи

$$l(y) = 0, \;\; 0 < x < 1,$$

$$y(0) = y_0, \;\; y'(0) = y_1, \;\; \lambda_j = a_j, \;\; j = 1, \dots, s \; .$$

Причем числа $y_0, y_1, a_1, \dots, a_s$ выбраны следующим образом

$$y_0 = \int_0^1 f(x)\overline{\sigma_0(x)}\, dx,$$

$$y_1 = \int_0^1 f(x)\overline{\gamma_1(x)}\, dx,$$

$$a_j = \int_0^1 f(x)\overline{\sigma_j(x)}\, dx, \;\; j = 1, \dots, s.$$

В пункте 2 решение $y_3(x)$ уже нами вычислена по формуле (1.12)

$$y_3(x) = (-1)^k \frac{\mathcal{H}_3(x, F_3)}{\Delta}. \qquad (1.19)$$

Остается вычислить решение $y_4(x)$. Заметим, что $y_4(x)$ удовлетворяет уравнению (1.13). Поэтому согласно формуле (1.14), имеем

$$y_4(x) = y_0 \cdot y_1(x) + y_1 \cdot y_2(x) + \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} F(t)dt, \;\; 0 < x < 1,$$

где $F(t) = -\sum_{i=1}^k U_{i1}(y_4) \frac{dh_i(x)}{dx} - \sum_{i=1}^k U_{i0} \frac{dh_i(x)}{dx} - \sum_{j=1}^s a_j \frac{dq_j(x)}{dx}$.

Отсюда вытекает

$$y_4(x) + \sum_{i=1}^{k} U_{i1}(y_4) \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} dh_i(t) =$$

$$= y_0 \cdot y_1(x) + y_1 \cdot y_2(x) + \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} \tilde{F}(t)dt, \quad 0 < x < 1,$$

где $\tilde{F}(t) = -\sum_{i=1}^{k} U_{i0} \frac{dh_i(x)}{dx} - \sum_{j=1}^{s} a_j \frac{dq_j(x)}{dx}$.

Применим к обеим частям последнего равенства формы $U_{j1}(\cdot)$. В результате вытекает система линейных алгебраических уравнений

$$U_{j1}(y_4) + \sum_{i=1}^{k} U_{i1}(y_4) U_j(H_i) = U_{j1}(K), \qquad j = 1, \dots, k,$$

где $K(x) = y_0 \cdot y_1(x) + y_1 \cdot y_2(x) + \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} \tilde{F}(t)dt.$

Введем обозначения

$$\mathcal{H}_4(x, K) = \begin{vmatrix} H_1(x) & H_2(x) & \cdots & H_k(x) & K(x) \\ 1 + U_{11}(H_1) & U_{11}(H_2) & \cdots & U_{11}(H_k) & U_{11}(K) \\ U_{21}(H_1) & 1 + U_{21}(H_2) & \cdots & U_{21}(H_k) & U_{21}(K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{k1}(H_1) & U_{k1}(H_2) & \cdots & U_{k1}(H_k) & U_{k1}(K) \end{vmatrix}.$$

Отсюда решение $y_4(x)$ может быть записано в виде

$$y_4(x) = (-1)^k \frac{\mathcal{H}_4(x,K)}{\Delta}. \tag{1.20}$$

Таким образом, для однозначной разрешимости уравнения (1.1)-(1.7) достаточно потребовать условие $\Delta \neq 0$, причем

$$y(x) = \frac{(-1)^k}{\Delta}\big(\mathcal{H}_3(x, F_3) + \mathcal{H}_4(x, K)\big). \tag{1.21}$$

Заметим, что F_3 и K линейно зависят от $f \in L_2(0,1)$:

$$F_3(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} f(t)dt.$$

$$K(x) = y_1(x)\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_0(t)}\,dt + y_2(x)\int_0^1 f(t)\overline{\gamma_1(t)}\,dt$$
$$-\int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} \Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij}\frac{dh_i(t)}{dt}\int_0^1 f(t)\overline{\sigma_{j-1}(t)}\,dt$$
$$+\sum_{j=1}^{s}\frac{dq_j(t)}{dt}\int_0^1 f(\tau)\overline{\sigma_j(\tau)}\,d\tau\Big)dt.$$

Таким образом, формула (1.21) дает представление обратного оператора.

1.4. Примеры.

Приведем некоторые следствия, вытекающие из теоремы 1.1.

Пример 1.1. Двухточечные краевые задачи. Пусть функций $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_{s+2}(x)$ являются гладкими функциями, удовлетворяющие равенствам

$$\frac{d^2\sigma_j(x)}{dx^2} - \frac{d}{dx}\Big(\overline{r_1(x)}\sigma_j(x)\Big) + \overline{r_0(x)}\sigma_j(x) = 0, 0 < x < 1, j = 1, \dots, s+2.$$

При $m = 1, \dots, s+2$ обозначим через

$$A_m = r_1(1)\overline{\sigma_m(1)} - \overline{\frac{d\sigma_m(1)}{dx}},$$

$$B_m = r_1(0)\overline{\sigma_m(0)} + \overline{\frac{d\sigma_m(0)}{dx}},$$

$$C_{mi} = h_i(1)\overline{\sigma_m(1)} - h_i(0)\overline{\sigma_m(0)} - \int_0^1 h_i(x)\,\overline{\frac{d\sigma_m(x)}{dx}}\,dx,$$

$$D_{mj} = q_j(1)\overline{\sigma_m(1)} - q_j(0)\overline{\sigma_m(0)} - \int_0^1 q_j(x)\,\overline{\frac{d\sigma_m(x)}{dx}}\,dx.$$

Тогда согласно теореме 1.1 однозначно всюду разрешима следующая задача:

$$l\left(y, \vec{\lambda}\right) = f(x), \;\; 0 < x < 1,$$

$$\begin{cases} A_1 y(1) + (B_1 - 1)y(0) + \dfrac{dy(1)}{dx}\overline{\sigma_1(1)} - \dfrac{dy(0)}{dx}\overline{\sigma_1(0)} + \sum\limits_{i=1}^{k} U_i(y)C_{1i} + \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j D_{1j} = 0, \\ A_2 y(1) - B_2 y(0) + \dfrac{dy(1)}{dx}\overline{\sigma_2(1)} - \dfrac{dy(0)}{dx}\left(\overline{\sigma_2(0)} + 1\right) + \sum\limits_{i=1}^{k} U_i(y)C_{2i} + \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j D_{2j} = 0, \\ A_m y(1) - B_m y(0) + \dfrac{dy(1)}{dx}\overline{\sigma_m(1)} - \dfrac{dy(0)}{dx}\overline{\sigma_m(0)} + \sum\limits_{i=1}^{k} U_i(y)C_{mi} \\ + \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j (D_{mj} - \delta_{j(m-2)}) = 0, m = 3, \cdots, s+2. \end{cases}$$

Здесь δ_{jm} − символ Кронекера, то есть $\delta_{mm} = 1$, а $\delta_{jm} = 0$ при $j \neq m$.

Таким образом, из примера 1.1 видно, что теорема 1.1 включает краевые задачи для дифференциального-граничного уравнения, расширенной системой линейных алгебраических уравнений. Отдельные примеры возникновения подобных задач можно найти в работах [64, 65]. При исследовании сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений возникает проблема вычисления начальных скачков, для нахождения которых интегро-дифференциальные уравнения приходится расширять линейными алгебраическими уравнениями [64, 65].

Заметим, что величины $\sigma_j(0), \sigma_j'(0)$ при $j = 1, \ldots, s+2$ могут быть выбраны произвольно, в то же время величины $\sigma_j(1), \sigma_j'(1)$ при $j = 1, \ldots, s+2$ вычисляются. К примеру,

$$\sigma_j(1) = \sigma_j(0) \quad \varphi(1) + \sigma_j'(0) \;\; \psi(1),$$

$$\sigma_j'(1) = \sigma_j(0) \quad \varphi'(1) + \sigma_j'(0) \;\; \psi'(1),$$

где $\{\varphi(x)$ и $\psi(x)\}$ −фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left(\overline{r_1(x)}\cdot\Phi(x)\right) + \overline{r_0(x)}\cdot\Phi(x) = 0, 0 < x < 1,$$

подчиненная начальным условиям в нуле

$$\psi'(0) = \varphi(0) = 1, \quad \psi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

Пример 1.2. Многоточечные краевые задачи.

Пусть $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$. Предположим, что функций $\sigma_1(x), \sigma_2(x), \dots, \sigma_{s+2}(x)$ являются гладкими функциями, удовлетворяющие равенствам при $m = 0, \cdots, N-1$

$$\frac{d^2\sigma_j(x)}{dx^2} - \frac{d}{dx}\left(\overline{r_1(x)}\sigma_j(x)\right) + \overline{r_0(x)}\sigma_j(x) = 0, x_m < x < x_{m+1},$$

$$j = 1, \dots, s+2.$$

При $l = 1, \dots, s+2$ обозначим через

$$A_l = r_1(1)\overline{\sigma_l(1)} - \overline{\frac{d\sigma_l(1)}{dx}},$$

$$B_l = r_1(0)\overline{\sigma_l(0)} + \overline{\frac{d\sigma_l(0)}{dx}},$$

$$C_{li} = h_i(1)\overline{\sigma_l(1)} - h_i(0)\overline{\sigma_l(0)} - \int_0^1 h_i(x)\overline{\frac{d\sigma_l(x)}{dx}}dx +$$

$$+ \sum_{m=1}^{N-1} h_i(x_m)\left(\overline{\sigma_l(x_m - 0)} - \overline{\sigma_l(x_m + 0)}\right),$$

$$D_{lj} = q_j(1)\overline{\sigma_l(1)} - q_j(0)\overline{\sigma_l(0)}$$

$$- \int_0^1 q_j(x)\overline{\frac{d\sigma_l(x)}{dx}}dx + \sum_{m=1}^{N-1} q_j(x_m)\left(\overline{\sigma_l(x_m - 0)} - \overline{\sigma_l(x_m + 0)}\right),$$

$$E_{lm} = r_1(x_m)\left(\overline{\sigma_l(x_m - 0)} - \overline{\sigma_l(x_m + 0)}\right) - \left(\overline{\frac{d\sigma_l(x_m - 0)}{dx}} - \overline{\frac{d\sigma_l(x_m + 0)}{dx}}\right),$$

$$F_{lm} = \overline{\sigma_l(x_m - 0)} - \overline{\sigma_l(x_m + 0)}, m = 1, \dots, N-1.$$

Тогда согласно теореме 1.1 однозначно всюду разрешима следующая задача:

$$l\left(y,\vec{\lambda}\right)=f(x),\ \ 0<x<1,$$

$$\begin{cases} A_1y(1)+(B_1-1)y(0)+\dfrac{dy(1)}{dx}\overline{\sigma_1(1)}-\dfrac{dy(0)}{dx}\overline{\sigma_1(0)} \\ +\sum\limits_{i=1}^{k}U_i(y)C_{1i}+\sum\limits_{j=1}^{s}\lambda_jD_{1j}+\sum\limits_{m=1}^{N-1}\left(y(x_m)E_{1m}+\dfrac{dy(x_m)}{dx}F_{1m}\right)=0, \\ A_2y(1)+B_2y(0)+\dfrac{dy(1)}{dx}\overline{\sigma_2(1)}-\dfrac{dy(0)}{dx}\left(\overline{\sigma_2(0)}+1\right) \\ +\sum\limits_{i=1}^{k}U_i(y)C_{2i}+\sum\limits_{j=1}^{s}\lambda_jD_{2j}+\sum\limits_{m=1}^{N-1}\left(y(x_m)E_{2m}+\dfrac{dy(x_m)}{dx}F_{2m}\right)=0, \\ A_ly(1)+B_ly(0)+\dfrac{dy(1)}{dx}\overline{\sigma_l(1)}-\dfrac{dy(0)}{dx}\overline{\sigma_l(0)}+\sum\limits_{i=1}^{k}U_i(y)C_{li} \\ +\sum\limits_{j=1}^{s}\lambda_j\left(D_{lj}-\delta_{j(l-2)}\right)+\sum\limits_{m=1}^{N-1}\left(y(x_m)E_{lm}+\dfrac{d\square\square(x_m)}{dx}F_{lm}\right)=0, \end{cases}$$

$$l=3,\dots,s+2.$$

Заметим, что величины $\sigma_j(x_m+0),\sigma_j'(x_m+0)$ при $j=1,\dots,s+2,m=0,1,\dots,N-1$ могут быть выбраны произвольно, в то же время величины $\sigma_j(x_{m+1}-0),\sigma_j'(x_{m+1}-0)$ вычисляются. К примеру,

$$\sigma_j(x_1-0)=\sigma_j(0)\quad\varphi(x_1-0)+\sigma_j'(0)\ \ \psi(x_1-0),$$

$$\sigma_j'(x_1-0)=\sigma_j(0)\quad\varphi'(x_1-0)+\sigma_j'(0)\ \ \psi'(x_1-0).$$

В работах Джумабаева Д.С. и Асанова А.Т. [66-70], при исследовании однозначной разрешимости краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений применяется метод параметризации. При этом возникают многоточечные краевые задачи для дифференциальных уравнений с алгебраическими членами.

Пример 1.3. Коэффициентные обратные задачи.

В данном примере предположим, что $h_1(x)\equiv\cdots\equiv h_k(x)\equiv 0$. Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$l\left(y,\vec{\lambda}\right)\equiv\frac{d^2y(x)}{dx^2}+r_1(x)\frac{dy(x)}{dx}+r_0(x)y(x)=$$

$$f(x) - \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{d}{dx} q_j(x), \quad 0 < x < 1. \tag{1.22}$$

Предположим, что выполнены предположения из примера 1.1. Также сохраним обозначения примера 1.1. Тогда согласно теореме 1.1 однозначно разрешимо уравнение (1.22) относительно $\{y(x), 0 < x < 1, \lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, если выполняются краевые условия

$$\begin{cases} A_1 y(1) + (B_1 - 1)y(0) + \dfrac{dy(1)}{dx}\overline{\sigma_1(1)} - \dfrac{dy(0)}{dx}\overline{\sigma_1(0)} + \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \lambda_j D_{1j} = 0\,, \\ A_2 y(1) - B_2 y(0) + \dfrac{dy(1)}{dx}\overline{\sigma_2(1)} - \dfrac{dy(0)}{dx}\left(\overline{\sigma_2(0)} + 1\right) + \displaystyle\sum_{j=1}^{s} \lambda_j D_{2j} = 0, \end{cases} \tag{1.23}$$

а также дополнительные условия для нахождения неизвестных $\lambda_1, \dots, \lambda_s$:

$$A_m y(1) - B_m y(0) + \frac{dy(1)}{dx}\overline{\sigma_m(1)} - \frac{dy(0)}{dx}\overline{\sigma_m(0)} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j (D_{mj} - \delta_{j(m-2)}) = 0,$$

$$m = 3, \cdots, s + 2. \tag{1.24}$$

Задача, подобная задаче (1.22)-(1.23)-(1.24) называется коэффициентной обратной задачей. При этом роль дополнительных требований для определения правых частей $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ играют соотношения (1.24).

2. Эквивалентные граничные условия для дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами.

В этой части диссертационной работы исследуются дифференциально-граничное уравнение с алгебраическими членами на конечном интервале, которые представляют гибрид ДАУ с граничными членами. В этой главе дается полное описание всевозможных линейных корректно-разрешимых задач.

2.1. Постановка краевой задачи для дифференциально-алгебраического уравнения с граничными членами

Исследуется объединённая постановка, содержащая дифференциальное уравнение с краевыми условиями, в структуре которого присутствуют алгебраические компоненты.

$$\begin{cases} l(y;\vec{\mu}) \equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x)}{dx} + \sum_{i=1}^{k} h_i(x)U_i(y) + \sum_{j=1}^{s}\mu_j q_j(x)\right) \\ \quad +r_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + r_0(x)y(x) = f(x),\ \ 0 < x < 1, \\ \theta_m(y;\vec{\mu}) \equiv \sum_{j=1}^{s} a_{mj}\mu_j + b_m\, y(1) + c_m y(0) + \\ \quad +d_m\frac{dy(1)}{dx} + e_m\frac{dy(0)}{dx} = \omega_m, \\ \quad m = 1,\dots,s\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

где $r_k \in C^{(k)}[0,1], k = 0,1,$

$\{h_1(\cdot),\dots,h_k(\cdot)\}$ и $\{q_1(\cdot),\dots,q_s(\cdot)\}$ – произвольные наборы функций. Граничные формы:

$$U_i(y) = \sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{ij}y^{(j-1)}(0) + \beta_{ij}y^{(j-1)}(1)\right), i = 1,\dots,k, \tag{2.2}$$

где α_{ij}, β_{ij} – некоторые комплексные числа.

Теперь добавим к системе уравнений (2.1) дополнительные условия:

$$\begin{cases} V_1(y,\vec{\mu}) = \alpha_1 y(1) + \beta_1 y(0) + \gamma_1\frac{dy(1)}{dx} + \delta_1\frac{dy(0)}{dx} = 0, \\ V_2(y,\vec{\mu}) = \alpha_2 y(1) + \beta_2 y(0) + \gamma_2\frac{dy(1)}{dx} + \delta_2\frac{dy(0)}{dx} = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

где ранг числовой граничной матрицы $\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix}$ считается равным двум.

Граничная матрица Γ выбрана так, чтобы система (2.1),(2.3) имела единственное решение при всех $f(x) \in L_2(0,1), \omega_1 \in \mathbb{C}, \dots, \omega_s \in \mathbb{C}$.

Поставленная задача в случае дифференциальных уравнений хорошо известна в [56].

2.2. Граничные условия и их эквивалентные формулировки

В данной части диссертационной работы устанавливается ответ на следующий вопрос: существует ли другие условия, кроме условий задаваемых (2.3), чтобы система уравнение (2.1) с этими дополнительными условиями имело единственное решение при всех $f(x) \in L_2(0,1), \omega_1 \in \mathbb{C}, \dots, \omega_s \in \mathbb{C}$? Выписать общий вид таких дополнительных условий.

Теорема 2.1. Пусть $\Delta = det\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix} \neq 0$,, тогда задача (2.1),(2.3) однозначно разрешима при всех правых частях $f(x) \in L_2(0,1), \omega_1 \in \mathbb{C}, \dots, \omega_s \in \mathbb{C}$, и решение задачи (2.1), (2.3) задается формулой

$$y_0(x) = \sum_{m=1}^{s} \omega_m \left(\frac{\mathcal{H}_{m1}}{\Delta} y_1(x) + \frac{\mathcal{H}_{m2}}{\Delta} y_2(x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathcal{H}_{(s+i)m}}{\Delta} \widetilde{H_i}(x) + \sum_{j=1}^{s} \frac{\mathcal{H}_{jm}}{\Delta} \widetilde{Q_j}(x) \right) +$$

$$+ \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} f(t)dt +$$

$$+ \frac{A_1}{\Delta} y_1(x) \int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} f(t)dt +$$

$$+ \frac{A_2}{\Delta} y_2(x) \int_0^1 \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(1) & y_2(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} f(t)dt + \qquad (2.4)$$

$$\frac{A_3}{\Delta}\sum_{i=1}^{k}\widetilde{H_i}(x)\int_0^1\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1(1) & y_2(1)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(1) & y_2'(1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}f(t)dt+$$

$$+\frac{A_4}{\Delta}\sum_{j=1}^{s}\widetilde{Q_j}(x)\int_0^1\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1(1) & y_2(1)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(1) & y_2'(1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}f(t)dt,$$

$$\mu_j^0=\frac{1}{\Delta}\left(\sum_{m=1}^{s}\omega_m\,\mathcal{H}_{jm}+A_4\int_0^1\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1(1) & y_2(1)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(1) & y_2'(1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}f(t)dt\right),j=1,\dots,s,$$

где, $\mathcal{H}_{m1},\mathcal{H}_{m2},\mathcal{H}_{(s+i)m},\mathcal{H}_{jm};\ A_1,\ A_2,A_3,\ A_4$ −определители, которые представлены в приложении А.

Введем обозначения

$$\begin{bmatrix}A\\ C_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}-V_1(\widetilde{Q_1})\dots a_{1s}-V_1(\widetilde{Q_s}) & -V_1(\widetilde{H_1}) & \dots & -V_1(\widetilde{H_k}) & V_1(y_1) & V_1(y_2)\\ \dots\ \dots\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{s1}-V_1(\widetilde{Q_1})\dots a_{ss}-V_1(\widetilde{Q_s}) & -V_1(\widetilde{H_1}) & \dots & -V_1(\widetilde{H_k}) & V_1(y_1) & V_1(y_2)\\ -U_1(\widetilde{Q_1})\ \dots\ -U_1(\widetilde{Q_s}) & -U_1(\widetilde{H_1})-1\dots & & -U_1(\widetilde{H_k}) & U_1(y_1) & U_1(y_2)\\ \dots\ \dots\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -U_k(\widetilde{Q_1})\ \dots\ -U_k(\widetilde{Q_s}) & -U_k(\widetilde{H_1}) & \dots & -U_k(\widetilde{H_k})-1 & U_k(y_1) & U_k(y_2)\\ -V_2(\widetilde{Q_1})\ \dots\ -V_2(\widetilde{Q_s}) & -V_2(\widetilde{H_1}) & \dots & -V_2(\widetilde{H_k}) & V_2(y_1) & V_2(y_2)\\ -V_3(\widetilde{Q_1})\ \dots\ -V_3(\widetilde{Q_s}) & -V_3(\widetilde{H_1}) & \dots & -V_3(\widetilde{H_k}) & V_3(y_1) & V_3(y_2)\end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица A порождается системой (2.1), а матрица C_0 вытекает из краевых условий (2.3), элементы этой матрицы детально представлены в приложений В.

В задаче (2.1),(2.3) краевые условия (2.3) являются однородными. Теперь рассмотрим случай, когда дополнительные условия (2.3) также являются неоднородными.

Теорема 2.2. При $\Delta=det\begin{pmatrix}A\\ C_0\end{pmatrix}\neq 0$ для любых векторов $\vec{p}$ и при всех $f(x)\in L_2(0,1),\omega_1\in\mathbb{C},\dots,\omega_s\in\mathbb{C}$, система уравнений (2.1) с неоднородными дополнительными условиями

$$\begin{cases}\alpha_1 y(1)+\beta_1 y(0)+\gamma_1\frac{dy(1)}{dx}+\delta_1\frac{dy(0)}{dx}=p_1,\\ \alpha_2 y(1)+\beta_2 y(0)+\gamma_2\frac{dy(1)}{dx}+\delta_2\frac{dy(0)}{dx}=p_2,\end{cases}\qquad(2.5)$$

имеет единственное решение, причем

$$\begin{cases} y(x) = y_0(x) + p_1\left(\frac{\mathcal{H}_{01}}{\Delta}y_1(x) - \frac{\mathcal{H}_{02}}{\Delta}y_2(x) + \sum_{i=1}^{k}\frac{\mathcal{H}_{(s+i)2}}{\Delta}\widetilde{H}_i(x) + \sum_{j=1}^{s}\frac{\mathcal{H}_{j2}}{\Delta}\tilde{Q}_j(x)\right) \\ \quad + p_2\left(-\frac{\mathcal{H}_{10}}{\Delta}y_1(x) - \frac{\mathcal{H}_{20}}{\Delta}y_2(x) + \sum_{i=1}^{k}\frac{\mathcal{H}_{(s+i)3}}{\Delta}\widetilde{H}_i(x) + \sum_{j=1}^{s}\frac{\mathcal{H}_{j3}}{\Delta}\tilde{Q}_j(x)\right), \\ \mu_j = \mu_j^0 + p_1\frac{\mathcal{H}_{j2}}{\Delta} + p_2\frac{\mathcal{H}_{j3}}{\Delta}, j = 1, \dots, s, \end{cases} \quad (2.6)$$

где, $\mathcal{H}_{01}, \mathcal{H}_{02}, \mathcal{H}_{20}, \mathcal{H}_{10}, \mathcal{H}_{(s+i)2}, \mathcal{H}_{(s+i)3}, \mathcal{H}_{j2}, \mathcal{H}_{j3}$ −определители, которые представлены в приложении С; $y_0(x), \mu_j^0$ −решение задачи (2.1),(2.3).

Теперь покажем, как из теоремы 2.1 получить ответ на поставленную задачу. Для этого достаточно предполагать, чтобы вектор $\vec{p}$ непрерывным линейным образом зависит от набора $\{f(x) \in L_2(0,1), \omega_1 \in \mathbb{C}, \dots, \omega_s \in \mathbb{C}\}$. Иначе говоря, компоненты вектора $\vec{p}$ являются линейными непрерывными функционалами над пространством $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$. Применяя теорему об общем виде линейного непрерывного функционала над пространством

$L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$, можем сформулировать основное утверждение работы:

Теорема 2.3. Пусть $\sigma_1(x), \sigma_2(x) -$ любые функции, которые $\sigma_1(x) \in L_2(0,1), \sigma_2(x) \in L_2(0,1)$, и даны произвольные векторы $\overrightarrow{\xi_1} \in \mathbb{C}^s, \overrightarrow{\xi_2} \in \mathbb{C}^s$. Тогда при $\Delta = det\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix} \neq 0$ система уравнений (2.1) с дополнительными условиями

$$\begin{cases} \alpha_1 y(1) + \beta_1 y(0) + \gamma_1\frac{dy(1)}{dx} + \delta_1\frac{dy(0)}{dx} - \\ \int_0^1 l(y,\vec{\mu})\sigma_1(x)dx - \sum_{m=1}^{s}\theta_m(y,\vec{\mu})\xi_{1m} = 0, \\ \alpha_2 y(1) + \beta_2 y(0) + \gamma_2\frac{dy(1)}{dx} + \delta_2\frac{dy(0)}{dx} - \\ \int_0^1 l(y,\vec{\mu})\sigma_2(x)dx - \sum_{m=1}^{s}\theta_m(y,\vec{\mu})\xi_{2m} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

имеет единственное решение при всех $f(x) \in L_2(0,1), \omega_1 \in \mathbb{C}, \dots, \omega_s \in \mathbb{C}$,

и для него верно представление,

$$y(x) = y_0(x) +$$

$$\sum_{m=1}^{s}\omega_m\left(\frac{\mathcal{H}_{01}\xi_{1m} + \mathcal{H}_{10}\xi_{2m}}{\Delta}y_1(x) + \frac{\mathcal{H}_{02}\xi_{1m} + \mathcal{H}_{20}\xi_{2m}}{\Delta}y_2(x)\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k}\frac{\mathcal{H}_{(s+i)2}\xi_{1m} + \mathcal{H}_{(s+i)3}\xi_{2m}}{\Delta}\widetilde{H_i}(x) +\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\frac{\mathcal{H}_{j2}\xi_{1m}+\mathcal{H}_{j3}\xi_{2m}}{\Delta}\widetilde{Q_j}(x)\Bigg)$$

$$+\frac{\left(\mathcal{H}_{01}\sigma_1(t)+\mathcal{H}_{10}\sigma_2(t)\right)}{\Delta}y_1(x)\int_0^1\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1(1) & y_2(1)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(1) & y_2'(1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}f(t)dt$$

$$+\frac{\left(\mathcal{H}_{02}\sigma_1(t)+\mathcal{H}_{20}\sigma_2(t)\right)}{\Delta}y_2(x)\int_0^1\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1(1) & y_2(1)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(1) & y_2'(1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}f(t)dt$$

$$+\frac{\left(\mathcal{H}_{(s+i)2}\sigma_1(t)+\mathcal{H}_{(s+i)3}\sigma_2(t)\right)}{\Delta}\sum_{i=1}^{k}\widetilde{H_i}(x)\int_0^1\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1(1) & y_2(1)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(1) & y_2'(1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}f(t)dt+$$

$$\frac{\left(\mathcal{H}_{j2}\sigma_1(t)+\mathcal{H}_{j3}\sigma_2(t)\right)}{\Delta}\sum_{j=1}^{s}\widetilde{Q_j}(x)\int_0^1\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1(1) & y_2(1)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(1) & y_2'(1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}f(t)dt, \quad (2.8)$$

$$\mu_j=\mu_j^0+\frac{1}{\Delta}\Bigg(\sum_{m=1}^{s}\omega_m\left(\mathcal{H}_{j2}\xi_{1m}+\mathcal{H}_{j3}\xi_{2m}\right)+$$

$$\left(\mathcal{H}_{j2}\sigma_1(t)+\mathcal{H}_{j3}\sigma_2(t)\right)\int_0^1\frac{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1(1) & y_2(1)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(1) & y_2'(1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}}f(t)dt\Bigg),$$

$$j=1,\dots,s;$$

где, $y_0(x),\mu_j^0$ −решение задачи (2.1),(2.3).

Таким образом, в теореме 2.3 указаны те дополнительные линейные условия (2.7) которые сохраняют единственность решения. Теорема 2.3 обратима, то есть приведенные в теореме 2.3 дополнительные линейные условия являются в некотором смысле самыми общими.

Теорема 2.4. Если система (2.1) с некоторыми дополнительными линейными условиями имеет единственное решение для любых $f(x)\in L_2(0,1),\omega_1\in\mathbb{C},\dots,\omega_s\in\mathbb{C},$ то дополнительные линейные условия

эквивалентны условиям вида (2.7) с некоторыми $\sigma_1(x) \in L_2(0,1), \sigma_2(x) \in L_2(0,1), \overrightarrow{\xi_1} \in \mathbb{C}^s, \overrightarrow{\xi_2} \in \mathbb{C}^s$.

2.3. Доказательства результатов пункта 2.2.

Доказательство теоремы 2.1.

Для доказательства теоремы 2.1 сначала введём обозначения:

$$H_i(x) = \frac{dh_i}{dx}; \quad Q_j(x) = \frac{dq_j(x)}{dx}.$$

Используя вышеуказанные обозначения, перепишем первое уравнение из системы (2.1) в следующем виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + r_1(x)\frac{dy}{dx} + r_0(x)y = F(x), \tag{2.9}$$

где $F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{k} U_i(y)H_i(x) - \sum_{j=1}^{s} \mu_j Q_j(x)$. Для доказательства теоремы 2.1, достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.1. Пусть $h_i \in W_2^1[0,1]$ при $i = 1, \dots, k$ и $q_j \in W_2^1[0,1]$ при $j = 1, \dots, s$, а граничные формы $U_1(\cdot), \dots, U_k(\cdot)$ выбраны в виде *(2.2)*. Допустим, что числа $\mu_1, \dots, \mu_s$ заданы, тогда для любого $f \in L_2(0,1)$ общее решение уравнения (2.9) совпадает с решением следующего уравнения:

$$y(x) = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{\mathrm{C}}_2 y_2(x) + \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} F(t)dt \tag{2.10}$$

где, $\tilde{C}_1, \tilde{\mathrm{C}}_2 -$ произвольные постоянные.

Для доказательства леммы 2.1 введем обозначения. Через $y_1(x)$ и $y_2(x)$ обозначим решения однородного дифференциального уравнения с начальными условиями в нуле

$$y''(x) + r_1(x)y'(x) + r_2(x)y(x) = 0, x \in (0,1),$$

$$y_1(0) = 1, \qquad y_2(0) = 0,$$

$$y'_1(0) = 0, \qquad y'_2(0) = 1.$$

Доказательство леммы 2.1.

Убедимся, что правая часть соотношения (2.10) является решением уравнения (2.9). Действительно,

$$y'(x) = \mathrm{C}_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} F(t)dt,$$

$$y''(x) = \mathrm{C}_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + F(x) +$$

$$\int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ -r_1(x)y_1'(x) - r_0(x)y_1(x) & -r_1(x)y_2'(x) - r_0(x)y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} F(t)dt,$$

Отсюда убеждаемся, что справедливо уравнение

$$y''(x) + r_1(x)y'(x) + r_0(x)y(x) = F(x), \qquad 0 < x < 1\,.$$

Таким образом, лемма доказана. Заметим, что из леммы 2.1 сразу же следует теорема 2.1. Теперь используя решение (2.10) находим неизвестные алгебраические члены $\mu_1, \dots, \mu_s$ и $U_1(y), \dots, U_k(y)$, и $\tilde{C}_1, \tilde{\mathrm{C}}_2$. Чтобы найти их используем метод Крамера. Используя этот метод находим $\mu_1, \dots, \mu_s$, для этого надо сперва подставлять на столбец j матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ вектор $\vec{\omega}$, а затем вектор $\vec{b}_1$, при $\Delta = det\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix} \neq 0$. Вектор $\vec{\omega}$ и $\vec{b}_1$ детально представлены в приложений $1, j = 1, \dots, s$.

А для того чтобы найти $U_1(y), \dots, U_k(y)$, надо подставлять на столбец $(s + i)$ матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ вектор $\vec{\omega}$, а затем вектор $\vec{b}_1$, при $\Delta = det\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix} \neq 0$, $i = 1, \dots, k$. Также для нахождения неизвестных $\tilde{C}_1, \tilde{\mathrm{C}}_2$ надо подставлять на столбцы $(s + k + 1)$ и $(s + k + 2)$ матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ вектор $\vec{\omega}$, а затем вектор $\vec{b}_1$, при $\Delta = det\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix} \neq 0$.

Доказательство теоремы 2.2 в основном повторяет рассуждения, которые применялись при доказательстве теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.3. вытекает из теоремы 2.2. Для этого достаточно p_1, p_2 выбрать в качестве непрерывных линейных функционалов над пространством $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$. Тогда согласно теореме Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала над $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$ имеем

$$\begin{cases} p_1(f, \vec{\omega}) = \int_0^1 f(x)\overline{\sigma_1(x)}\,dx + \sum_{m=1}^s \omega_m \xi_{1m}, \\ p_2(f, \vec{\omega}) = \int_0^1 f(x)\overline{\sigma_2(x)}\,dx + \sum_{m=1}^s \omega_m \xi_{2m}, \end{cases} \tag{2.11}$$

где $\sigma_1 \in L_2(0,1), \sigma_2 \in L_2(0,1), \overrightarrow{\xi_1} \in \mathbb{C}^s, \overrightarrow{\xi_2} \in \mathbb{C}^s$.

Теперь $f(x)$ и $\omega_1, \dots, \omega_s$ согласно системе уравнений (2.1) в соотношениях (2.11) заменим на величины $l(y, \vec{\mu})$ и $\theta_1(y, \vec{\mu}), \dots, \theta_s(y, \vec{\mu})$. Тогда вытекают соотношения (2.7), которые можно интерпретировать как новые граничные условия. Теорема 2.3 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2.4. Теперь перейдем к доказательству теоремы 2.4. Предположим, что к системе уравнений (2.1) добавлены Σ некоторые дополнительные линейные условия так, что система (2.1) с добавленными условиями при любых $f \in L_2(0,1), \omega_1 \in \mathbb{C}, \dots, \omega_s \in \mathbb{C}$ имеет единственное решение

$$w = (y(x), x \in (0,1);\ \mu_1, \dots, \mu_s) \in W_2^2(0,1) \times \mathbb{C}^s. \tag{2.12}$$

Через Λ_Σ обозначим оператор, соответствующий системе уравнений (2.1) с дополнительными условиями Σ. Из теоремы вложения следует, что $y(x)$ и $y'(x)$ −абсолютно непрерывные функций на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, для любого $f(x) \in L_2(0,1), \omega_1 \in \mathbb{C}, \dots, \omega_s \in \mathbb{C}$ однозначно определяются значения $y(0)$ и $y'(0)$, $\mu_j, j = 1, \dots, s$. Таким образом, $y(0) -$ представляет линейный функционал над пространством $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$, поскольку его значения могут линейно изменяться вместе с выбором $f(x) \in L_2(0,1), \omega_1 \in \mathbb{C}, \dots, \omega_s \in \mathbb{C}$.

Из условий теоремы 2.1 следует, что $\Lambda_\Sigma^{-1} -$ ограниченный оператор в $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$. Поэтому выполняются априорные оценки

$$|y(0)| + |y'(0)| + \sum_{j=1}^s |\mu_j| \le C\,\|f\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{\sum_{j=1}^s |\omega_j|^2}. \tag{2.13}$$

Следовательно, из оценки (2.13) следует, что $V_1(y, \vec{\mu}), V_2(y, \vec{\mu})$ являются линейными ограниченными функционалами над пространством $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$. Тогда по теореме Ф. Рисса об общем виде линейного ограниченного

функционала в пространстве $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$ следует существование единственного (для данного функционала) элемента $\sigma_1 \in L_2(0,1)$ и вектора $\overrightarrow{\xi_1} \in \mathbb{C}^s$такого, что

$$\begin{cases} V_1(y, \vec{\mu}) = \int_0^1 f(x)\overline{\sigma_1(x)}\, dx + \sum_{m=1}^s \omega_m \xi_{1m}\,, \\ V_2(y, \vec{\mu}) = \int_0^1 f(x)\overline{\sigma_2(x)}\, dx + \sum_{m=1}^s \omega_m \xi_{2m}\,, \end{cases} \tag{2.14}$$

где, $V_2(y, \vec{\mu})$ аналогично устанавливается $V_1(y, \vec{\mu})$.

Теперь рассмотрим систему уравнение (2.1) с дополнительными условиями (2.14), предварительно $f(x)$ заменив на $l(y, \vec{\mu})$, и $\vec{\omega}$ заменив на $\theta_j(y;\ \vec{\mu}), j = 1, \dots, s$. Согласно теореме 2.4 эта задача имеет единственное решение, которое совпадает с решением w из (2.12). Отсюда следует эквивалентность условия (2.14) с дополнительными условиями Σ. Теорема 2.4 полностью доказана.

3. Самосопряженные дифференциально-алгебраические операторы с граничными членами.

В работе выделен класс самосопряженных дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами. Исследована аналитическая природа резольвенты такого оператора. Выписаны представления собственных векторов исходного оператора, которые представляют ортогональный базис в пространстве $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$. Система собственных векторов спроектирована на подпространстве $L_2(0,1)$. Оказалось, что спроектированная система в пространстве $L_2(0,1)$ становится базисом Рисса только после удаления из нее конечного числа функций. Указан критерий, который указывает какие функций следует удалять из спроектированной системы, для базисности оставшейся части. Результаты [71] обеспечивают необходимую классическую основу для изучения дифференциально-алгебраических операторов, которые составляют основную тему данной части.

В работе [72, 73] приведены корректно-разрешимые задачи для дифференциально-алгебраических уравнений с граничными членами. В предлагаемой части работы исследуются свойства базисности системы корневых векторов таких краевых задач. Исследование спектральных свойств подобных операторов представляют начальный этап задачи управления систем переменной структуры [74]. Изучаемые нами дифференциально-алгебраические операторы в случае негладких коэффициентов $q_1(x), \dots, q_s(x)$ являются операторами переменной структуры. Отметим также интересный круг проблем, связанных с изучением дифференциальных операторов с граничными условиями, зависящими от спектрального параметра [75-79]. Изучаемые нами дифференциально-алгебраические операторы после исключения ее алгебраической части сводятся к дифференциальным операторам с граничными условиями, сложно зависящими от спектрального параметра.

3.1. Сопряженные операторы к дифференциально-алгебраическим операторам с граничными членами.

В $L_2(0,1)\times\mathbb{C}^s$ оператор $\mathcal{L}$ конструируется посредством формализации объединённого комплекса соотношений, состоящего из дифференциально-алгебраического оператора с краевыми членами.

$$\begin{cases} l(y;\ \vec{\mu}) \equiv \frac{d^2y(x)}{dx^2} + r_0(x)y(x) + \vec{q}^T(t)\,\vec{\mu} + \varphi_1(x)y(0) + \varphi_2(x)y(1), \\ \vec{\theta}(y;\ \vec{\mu}) \equiv P\vec{\mu} + \int_0^1 y(t)\vec{Q}(t)dt + \overrightarrow{A_1}y(0) + \overrightarrow{A_2}y(1), \end{cases} \tag{3.1}$$

здесь $r_0 \in C[0,1]$, а $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются заранее заданными непрерывными функциями. Вектор-функция $\vec{q}(x)$формируется из $q_j(x)$, каждая из которых непрерывна на интервале $0 < x < 1$ для $j = 1, \dots, s$.

Область определения оператора $\mathcal{L}$:

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ \begin{pmatrix} y(x) \\ \vec{\mu} \end{pmatrix} : y \in W_2^2[0,1], \vec{\mu} \in \mathbb{C}^s, V_j(y,\vec{\mu}) = 0, j = 1,2. \right\},$$

где

$$\begin{cases} V_1(y,\vec{\mu}) \equiv y'(0) + y(0)\beta_{11} + y(1)\beta_{12} + \int_0^1 y(t)\Phi_1(t)dt + \vec{\alpha}_1^T\vec{\mu}, \\ V_2(y,\vec{\mu}) \equiv y'(1) + y(0)\beta_{21} + y(1)\beta_{22} + \int_0^1 y(t)\Phi_2(t)dt + \vec{\alpha}_2^T\vec{\mu}. \end{cases} \tag{3.2}$$

В первом разделе данной части работы выявлена структура сопряженного оператора $\mathcal{L}^*$. Затем выделены требования, когда выполняется операторное равенство $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. В случае самосопряженного оператора $\mathcal{L}$ приведены теоремы о разложений по его системе собственных элементов в пространстве $L_2(0,1)\times\mathbb{C}^s$. Иногда удается исключить алгебраическую часть оператора $\mathcal{L}$. В таком случае возникает некий дифференциальный оператор A с граничными условиями зависящими от спектрального параметра. Подобный эффект отмечен в работах [77, 79]. В отличие от оператора $\mathcal{L}$ из пространства $L_2(0,1)\times\mathbb{C}^s$ оператор A действует в пространстве $L_2(0,1)$. Для оператора A интересно исследовать теорему о разложений по его системе корневых элементов в пространстве $L_2(0,1)$. В заключительном разделе этой части приведены подобные утверждения. Приведем строгие формулировки основных результатов работы.

Теорема 3.1. Оператор $\mathcal{L}^*$ сопряженный к оператору $\mathcal{L}$ порождается дифференциально-алгебраическим выражением с граничными членами на конечном интервале относительно $g(x)$, а также системой линейных алгебраических соотношений относительно $\xi_1, \dots, \xi_s$

$$\begin{cases} l^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv \left(g(x)\right)'' + \overline{r_0(x)}g(x) + \vec{Q}^*(x)\vec{\xi} + \overline{\Phi_1(x)}g(0) - \overline{\Phi_2(x)}g(1), \\ \vec{\theta}^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv P^*\vec{\xi} + \int_0^1 \overline{\vec{q}(t)}\, g(t)dt + \overline{\overrightarrow{\alpha_1}}g(0) - \overline{\overrightarrow{\alpha_2}}g(1). \end{cases} \quad (3.3)$$

Область определения оператора $\mathcal{L}^*$ определяется следующим образом

$$D(\mathcal{L}^*) = \left\{ \begin{pmatrix} g(x) \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} : g(x) \in W_2^2[0,1], \vec{\xi} \in \mathbb{C}^s, V_k^*\left(g,\vec{\xi}\right) = 0, k = 1,2. \right\},$$

где

$$\begin{cases} V_1^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv g'(0) + \overline{\beta_{11}}g(0) - \overline{\beta_{21}}g(1) + \int_0^1 \overline{\varphi_1(t)}g(t)dt + \overrightarrow{A_1}^T\vec{\xi}, \\ V_2^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv\ g'(1) - \overline{\beta_{12}}g(0) + \overline{\beta_{22}}g(1) - \int_0^1 \overline{\varphi_2(t)}g(t)dt - \overrightarrow{A_2}^T\vec{\xi}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Пусть $\varphi_1(x) \equiv 0$, $\varphi_2(x) \equiv 0$ и $\vec{q}(t) \equiv 0, j = 1, \dots, s$, а также $\Phi_1(x) \equiv 0, \Phi_2(x) \equiv 0$ и $\vec{Q}(t) \equiv 0$. В этом случае сопряженный оператор $\mathcal{L}^*$ порождается дифференциальным выражением на конечном интервале относительно $g(x)$, а также системой линейных алгебраических соотношений относительно $\xi_1, \dots, \xi_s$

$$\begin{cases} l^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv \left(g(x)\right)'' + \overline{r_0(x)}g(x), \\ \vec{\theta}^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv P^*\vec{\xi} + \overline{\overrightarrow{\alpha_1}}g(0) - \overline{\overrightarrow{\alpha_2}}g(1). \end{cases}$$

При этом область определения оператора $\mathcal{L}^*$ определяется следующим образом

$$D(\mathcal{L}^*) = \left\{ \begin{pmatrix} g(x) \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} : g(x) \in W_2^2[0,1], \vec{\xi} \in \mathbb{C}^s, V_k^*\left(g,\vec{\xi}\right) = 0, k = 1,2. \right\},$$

где

$$\begin{cases} V_1^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv g'(0) + \overline{\beta_{11}}g(0) - \overline{\beta_{21}}g(1) + \overrightarrow{A_1}^T\vec{\xi}, \\ V_2^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv\ g'(1) - \overline{\beta_{12}}g(0) + \overline{\beta_{22}}g(1) - \overrightarrow{A_2}^T\vec{\xi}. \end{cases}$$

В этом случае задача на собственные значения

$$\begin{cases} l^*\left(g,\vec{\xi}\right) = \lambda g(x), \\ \vec{\theta}^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv \lambda\vec{\xi}, \end{cases}$$

с условиями

$$\begin{cases} V_1^*\left(g,\vec{\xi}\right) = 0, \\ V_2^*\left(g,\vec{\xi}\right) = 0, \end{cases}$$

сводится к следующей задаче на собственные значения для дифференциального уравнения

$$\left(g(x)\right)'' + \overline{r_0(x)}g(x) = \lambda g(x), 0 < x < 1,$$

с граничными условиями (зависящими от спектрального параметра)

$$\begin{cases} g'(0) + f_1(\lambda)g(0) + f_2(\lambda)g(1) = 0, \\ g'(1) + f_3(\lambda)g(0) + f_4(\lambda)g(1) = 0, \end{cases}$$

где $f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda), f_4(\lambda)$ −некоторые рациональные функций от λ.

Подобные задачи с различных позиции изучены Гулиевым [79]. А свойства обратимости оператора $\mathcal{L}$ с граничными условиями более общего вида чем (3.2) исследованы в работе [73].

Теперь выделим самосопряженные дифференциально-алгебраические операторы с граничными членами.

Теорема 3.2. Оператор $\mathcal{L}$ является самосопряженным в пространстве $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$, если

выполняется равенства

$$\begin{cases} \vec{q}(x) \equiv \overline{\vec{Q}(x)}, \\ \varphi_1(x) \equiv \overline{\Phi_1(x)},\ \varphi_2(x) \equiv -\overline{\Phi_2(x)}, \quad r_0(x) \equiv \overline{r_0(x)}, \\ \overrightarrow{A_1} = \overline{\overrightarrow{\alpha_1}},\ \overrightarrow{A_2} = -\overline{\overrightarrow{\alpha_2}}, P = P^*, \\ \beta_{11} = \overline{\beta_{11}},\ \beta_{12} = -\overline{\beta_{21}}, \quad \beta_{22} = \overline{\beta_{22}}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Теорема 3.2 обобщает некоторые результаты обзора А. М. Кролла [28-33]. В работе [30] выделены классы самосопряженных дифференциально-граничных операторов. В то же время в теореме 3.2 указаны классы самосопряженных дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами. Приведем примеры, которые иллюстрируют указанные обобщения.

3.2. Пример 1. Случай распадения оператора на дифференциальный и матричный операторы.

Пусть $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0,\ \overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{A_2} = 0,$ и $\vec{q}(t) = \vec{Q}(t) = 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}$ задается с помощью выражений

$$\begin{cases} l(y;\ \vec{\mu}) \equiv \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + r_0(x)y(x), \\ \vec{\theta}(y;\ \vec{\mu}) \equiv P\vec{\mu}, \end{cases}$$

а также граничных форм:

$$\begin{cases} V_1(y, \vec{\mu}) \equiv y'(0) + y(0)\beta_{11} + y(1)\beta_{12}, \\ V_2(y, \vec{\mu}) \equiv y'(1) + y(0)\beta_{21} + y(1)\beta_{22}. \end{cases}$$

В таком случае сопряженный оператор $\mathcal{L}^*$ задается с помощью выражений

$$\begin{cases} l^*\left(g, \vec{\xi}\right) \equiv \left(g(x)\right)'' + \overline{r_0(x)}g(x), \\ \vec{\theta}^*\left(g, \vec{\xi}\right) \equiv P^*\vec{\xi}, \end{cases}$$

а также граничных форм:

$$\begin{cases} V_1^*\left(g, \vec{\xi}\right) \equiv g'(0) + \overline{\beta_{11}}g(0) - \overline{\beta_{21}}g(1), \\ V_2^*\left(g, \vec{\xi}\right) \equiv\ g'(1) - \overline{\beta_{12}}g(0) + \overline{\beta_{22}}g(1). \end{cases}$$

Таким образом, в этом случае оператор $\mathcal{L}$ распадается на два оператора: один из операторов является дифференциальным в пространстве $L_2(0,1)$, а другой оператор является матричным оператором в пространстве $\mathbb{C}^s$.

3.3. Пример 2. Случай слабого граничного взаимодействия дифференциального и матричного операторов.

Пусть $\vec{q}(t) = \vec{Q}(t) = 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}$ задается с помощью выражений

$$\begin{cases} l(y;\ \vec{\mu}) \equiv \frac{d^2y(x)}{dx^2} + r_0(x)y(x) + \varphi_1(x)y(0) + \varphi_2(x)y(1), \\ \vec{\theta}(y;\ \vec{\mu}) \equiv P\vec{\mu} + \overrightarrow{A_1}y(0) + \overrightarrow{A_2}y(1), \end{cases}$$

а также граничных форм:

$$\begin{cases} V_1(y,\vec{\mu}) \equiv y'(0) + y(0)\beta_{11} + y(1)\beta_{12} + \int_0^1 y(t)\Phi_1(t)dt + \vec{\alpha}_1^T\vec{\mu}, \\ V_2(y,\vec{\mu}) \equiv y'(1) + y(0)\beta_{21} + y(1)\beta_{22} + \int_0^1 y(t)\Phi_2(t)dt + \vec{\alpha}_2^T\vec{\mu}. \end{cases}$$

В таком случае сопряженный оператор $\mathcal{L}^*$ задается с помощью выражений

$$\begin{cases} l^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv \left(g(x)\right)'' + \overline{r_0(x)}g(x) + \overline{\Phi_1(x)}g(0) - \overline{\Phi_2(x)}g(1), \\ \vec{\theta}^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv P^*\vec{\xi} + \overrightarrow{\overline{\alpha_1}}g(0) - \overrightarrow{\overline{\alpha_2}}g(1). \end{cases}$$

а также граничных форм:

$$\begin{cases} V_1^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv g'(0) + \overline{\beta_{11}}g(0) - \overline{\beta_{21}}g(1) + \int_0^1 \overline{\varphi_1(t)}g(t)dt + \overrightarrow{A_1}^T\vec{\xi}, \\ V_2^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv\ g'(1) - \overline{\beta_{12}}g(0) + \overline{\beta_{22}}g(1) - \int_0^1 \overline{\varphi_2(t)}g(t)dt - \overrightarrow{A_2}^T\vec{\xi}. \end{cases}$$

В работе [30] сопряженный оператор вычислен в случае $\overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{A_2} = 0$.

3.4. Пример 3. Случай слабого алгебраического взаимодействия дифференциального и матричного операторов.

Пусть $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$, $\overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{A_2} = 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}$ задается с помощью выражений

$$\begin{cases} l(y;\,\vec{\mu}) \equiv \frac{d^2y(x)}{dx^2} + r_0(x)y(x) + \vec{q}^T(t)\,\vec{\mu}, \\ \vec{\theta}(y;\,\vec{\mu}) \equiv P\vec{\mu} + \int_0^1 y(t)\vec{Q}(t)dt\,, \end{cases}$$

а также граничных форм:

$$\begin{cases} V_1(y,\vec{\mu}) \equiv y'(0) + y(0)\beta_{11} + y(1)\beta_{12}, \\ V_2(y,\vec{\mu}) \equiv y'(1) + y(0)\beta_{21} + y(1)\beta_{22}. \end{cases}$$

В таком случае сопреженный оператор $\mathcal{L}^*$ задается с помощью выражений

$$\begin{cases} l^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv \left(g(x)\right)'' + \overline{r_0(x)}g(x) + \vec{Q}^*(x)\vec{\xi}, \\ \vec{\theta}^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv P^*\vec{\xi} + \int_0^1 \overline{\vec{q}(t)}\,g(t)dt, \end{cases}$$

а также граничных форм:

$$\begin{cases} V_1^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv g'(0) + \overline{\beta_{11}}g(0) - \overline{\beta_{21}}g(1), \\ V_2^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv\ g'(1) - \overline{\beta_{12}}g(0) + \overline{\beta_{22}}g(1). \end{cases}$$

3.5. Обоснование и доказательства результатов пункта 3.1.

В данном пункте приводится обоснование теорем 3.1 и 3.2. В начале докажем теорему 3.1.

Для доказательства теоремы 3.1 для любых гладких функций $y(x)$, $g(x)$ и произвольных векторов $\vec{\xi} \in \mathbb{C}^s, \vec{\mu}\ \in \mathbb{C}^s$ рассмотрим скалярное произведение

$$\left\langle \begin{pmatrix} l(y,\vec{\mu}) \\ \vec{\theta}(y,\vec{\mu}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x) \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} \right\rangle_{L_2(0,1)\times\mathbb{C}^s} =$$

$$\int_0^1 (l(y,\vec{\mu})\,\overline{g(x)}dx + \sum_{m=1}^{s} \theta_m(y,\vec{\mu})\overline{\xi_m}. \qquad (3.6)$$

Подставим систему (3.1) в формулу (3.6) и, затем интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^1 y(x)\left[\left(\overline{g(x)}\right)'' + r_0(x)\overline{g(x)} + \vec{Q}^T(t)\vec{\xi}\right]dx +$$

$$y(0)\left[\overrightarrow{A_1}^T\vec{\xi} + \overline{g'(0)} + \int_0^1 \varphi_1(t)\overline{g(t)}dt\right]$$

$$y'(0)\left[-\overline{g(0)}\right] + \qquad (3.7)$$

$$y(1)\left[\overrightarrow{A_2}^T\vec{\xi} - \overline{g'(1)} + \int_0^1 \varphi_2(t)\overline{g(t)}dt\right]$$

$$y'(1)\left[\ \overline{g(1)}\right] +$$

$$+\left(\int_0^1 \vec{q}(t)\overline{g(t)}dt + P\vec{\xi}\right)^T \cdot \vec{\mu}.$$

Пусть функция $y(x)$ удовлетворяет условиям (3.2). Из граничных условий (3.2) находим:

$$y'(0) = -\vec{\alpha}_1^T\vec{\mu} - \int_0^1 y(t)\Phi_1(t)dt - \beta_{11}y(0) - \beta_{12}y(1),$$

$$y'(1) = -\vec{\alpha}_2^T\vec{\mu} - \int_0^1 y(t)\Phi_2(t)dt - \beta_{21}y(0) - \beta_{22}y(1). \quad (3.8)$$

Теперь, подставляя из (3.8) значения $y'(0)$, $y'(1)$ в (3.7), получим соотношение:

$$\int_0^1 y(x)\left[\left(\overline{g(x)}\right)'' + r_0(x)\overline{g(x)} + \vec{Q}^T(t)\vec{\bar{\xi}} + \Phi_1(x)\overline{g(0)} - \Phi_2(x)\overline{g(1)}\right]dx +$$

$$y(0)\left[\overrightarrow{A_1}^T\vec{\bar{\xi}} + \overline{g'(0)} + \int_0^1 \varphi_1(t)\overline{g(t)}dt + \beta_{11}\overline{g(0)} - \beta_{21}\overline{g(1)}\right] +$$

$$y(1)\left[\overrightarrow{A_2}^T\vec{\bar{\xi}} - \overline{g'(1)} + \int_0^1 \varphi_2(t)\overline{g(t)}dt + \beta_{12}\overline{g(0)} - \beta_{22}\overline{g(1)}\right] +$$

$$+\left(\int_0^1 \vec{q}(t)\overline{g(t)}dt + P\vec{\bar{\xi}} + \overrightarrow{\alpha_1}\overline{g(0)} - \overrightarrow{\alpha_2}\overline{g(1)}\right)^T \cdot \vec{\mu}.$$

Если функция $g(x)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} V_1^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv g'(0) + \overline{\beta_{11}}g(0) - \overline{\beta_{21}}g(1) + \int_0^1 \overline{\varphi_1(t)}g(t)dt + \overrightarrow{A_1}^T\vec{\xi}, \\ V_2^*\left(g,\vec{\xi}\right) \equiv g'(1) - \overline{\beta_{12}}g(0) + \overline{\beta_{22}}g(1) - \int_0^1 \overline{\varphi_2(t)}g(t)dt - \overrightarrow{A_2}^T\vec{\xi}, \end{cases}$$

то выполняется равенство:

$$\langle \mathcal{L}\begin{pmatrix} y(x) \\ \vec{\mu} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x) \\ \vec{\xi} \end{pmatrix}\rangle_{L_2(0,1)\times\mathbb{C}^s} = \langle \begin{pmatrix} y(x) \\ \vec{\mu} \end{pmatrix}, \mathcal{L}^*\begin{pmatrix} g(x) \\ \vec{\xi} \end{pmatrix}\rangle_{L_2(0,1)\times\mathbb{C}^s}.$$

Теорема 3.1 полностью доказано.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 3.2. Доказательство теоремы 3.2 сразу вытекает из теоремы 3.1, так как выполняются следующие соотношения:

$$\begin{cases} \vec{q}(x) \equiv \overline{\vec{Q}(x)}, \\ \varphi_1(x) \equiv \overline{\Phi_1(x)}, \quad \varphi_2(x) \equiv -\overline{\Phi_2(x)}, \quad r_0(x) \equiv \overline{r_0(x)}, \\ \overrightarrow{A_1} = \overline{\overrightarrow{\alpha_1}}, \overrightarrow{A_2} = -\overline{\overrightarrow{\alpha_2}}, P = P^*, \\ \beta_{11} = \overline{\beta_{11}}, \quad \beta_{12} = -\overline{\beta_{21}}, \quad \beta_{22} = \overline{\beta_{22}}. \end{cases}$$

Таким образом, следующая задача

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(x)}{dx^2} + r_0(x)y(x) + \vec{q}^T(t)\,\vec{\mu} + \varphi_1(x)y(0) + \varphi_2(x)y(1) = f(x), \\ P\vec{\mu} + \displaystyle\int_0^1 y(t)\overline{\vec{q}(t)}dt + \overline{\overrightarrow{\alpha_1}}y(0) - \overline{\overrightarrow{\alpha_2}}y(1) = \omega_m, \qquad m = 1, \dots, s, \end{cases}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} y'(0) + y(0)\overline{\beta_{11}} - \overline{\beta_{21}}y(1) + \displaystyle\int_0^1 y(t)\overline{\varphi_1(t)}dt + \overline{\vec{\alpha}_1^T}\vec{\mu} = 0, \\ y'(1) - \overline{\beta_{12}}y(0) + \overline{\beta_{22}}y(1) - \displaystyle\int_0^1 y(t)\overline{\varphi_2(t)}dt - \overline{\vec{\alpha}_2^T}\vec{\mu} = 0 \end{cases}$$

является самосопряженной, если матрица P является эрмитовой матрицей, $r_0(x)$ вещественнозначной функцией. Теорема 3.2 доказана.

3.6. Представление резольвенты.

В этом пункте примем следующие обозначения:

$$r(y) \equiv \frac{d^2y(x)}{dx^2} + r_0(x)y(x), 0 < x < 1,$$

то есть $r(y)$ является линейным дифференциальным выражением второго порядка; $\vec{q}(x)$ вектор-функция, состоящая из компонент $q_j(x), j = 1, \dots, s, 0 < x < 1$; $\mathrm{P} = \left(p_{jm}\right)$-матрица размерности $s \times s$; $\vec{Q}(x)$ вектор-функция с компонентами $Q_m(x), m = 1, \dots, s, 0 < x < 1$; $\overrightarrow{A_1}$ и $\overrightarrow{A_2}$ векторы, компоненты которых обозначены через A_{1m} и A_{2m} соответственно при $m = 1, \dots, s$; $\vec{\omega}$ вектор с компонентами $\omega_m, m = 1, \dots, s$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} l(y;\ \vec{\mu}) \equiv r(y) + \varphi_1(x)y(0) + \varphi_2(x)y(1) + \langle \vec{\mu}, \overrightarrow{q(x)} \rangle = \lambda y(x) + f(x), \\ \quad \vec{\theta}(y;\ \vec{\mu}) \equiv \mathrm{P}\,\vec{\mu} + \int_0^1 \overrightarrow{Q(t)}y(t)dt + y(0)\overrightarrow{A_1} + y(1)\overrightarrow{A_2} = \lambda\vec{\mu} + \vec{\omega}, \end{cases} \quad (3.9)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} V_1(y, \vec{\mu}) \equiv y'(0) + y(0)\beta_{11} + y(1)\beta_{12} + \int_0^1 y(t)\Phi_1(t)dt + \vec{\alpha}_1^T\vec{\mu} = 0, \\ V_2(y, \vec{\mu}) \equiv y'(1) + y(0)\beta_{21} + y(1)\beta_{22} + \int_0^1 y(t)\Phi_2(t)dt + \vec{\alpha}_2^T\vec{\mu} = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Основная цель: при каких комплексных значениях параметра λ по заданному вектору $\begin{pmatrix} f(x) \\ \vec{\omega} \end{pmatrix}$ можно однозначно найти вектор $\begin{pmatrix} y(x) \\ \vec{\mu} \end{pmatrix}$?

Задача (3.9),(3.10) соответствует оператору $\mathcal{L}$, который определяется соотношениями (3.1),(3.2).

Введем K оператор Коши, который функцию $y(x)$ переводит в выражение $r(y)$:

$$K: y(x) \to r(y),$$

причем областью определения этого оператора является множество:

$$D(K) = \{y(x) \in W_2^2(0,1): y(0) = y'(0) = 0\}.$$

Для дальнейших целей удобно обозначить: при любых $f(x)$ функции $(K - \lambda I)^{-1}f(x)$ через $K(f;\lambda)(x)$. Здесь $K(f;\lambda)(x) = \int_0^x g(x,t)f(t)dt$, причем $g(x,t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}$, если $t < x$. Когда $t > x$, то $g(x,t) = 0$.

Для того чтобы исключить алгебраическую часть, то есть вычислим вектор $\vec{\mu}$ из равенства

$$\mathrm{P}\vec{\mu} - \lambda\vec{\mu} = \vec{b},$$

где $\vec{b} = \vec{\omega} - \int_0^1 \vec{Q}(t)y(t)dt - y(0)\overrightarrow{A_1} - y(1)\overrightarrow{A_2}$.

В дальнейшем через $P_j(\vec{\beta}, \lambda), j = 1, \dots, s$ определитель матрицы, которая получается из матрицы $(\mathrm{P} - \lambda I)$ заменой j-го столбца на столбец $\vec{\beta}$. Также введем вектор-столбец

$$\vec{P}(\vec{\beta}, \lambda) = \begin{pmatrix} P_1(\vec{\beta}, \lambda) & \cdots & P_s(\vec{\beta}, \lambda) \end{pmatrix}^T.$$

Через $p(\lambda)$ обозначим следующий определитель $det(\mathrm{P}-\lambda I)$. Через $(P-\lambda I)^{\#}$ обозначим матрицу присоединенную к матрице $(\mathrm{P}-\lambda I)$.

Воздействуя обе части второго равенства из (3.9) присоединенной матрицей $(P-\lambda I)^{\#}$, получим

$$p(\lambda)\vec{\mu}+\int_0^1 y(t)\vec{P}\left(\vec{Q}(t),\lambda\right)dt+y(0)\vec{P}\left(\vec{A}_1,\lambda\right)+$$

$$+y(1)\vec{P}\left(\vec{A}_2,\lambda\right)=\vec{P}(\vec{\omega},\lambda). \qquad (3.11)$$

Воздействуя на обе части равенства (3.9) оператором $(K-\lambda I)^{-1}$, получим

$$y(x)+y(0)K(\varphi_1;\lambda)(x)+y(1)K(\varphi_2;\lambda)(x)+\langle\vec{\mu},K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle=$$
$$K(f;\lambda)(x)+y(0)y_1(x)+y'(0)y_2(x), \qquad (3.12)$$

Здесь через $y_1(x)$ и $y_2(x)$ обозначены решения однородного дифференциального уравнения

$$y''(x)+r_1(x)y'(x)+r_2(x)y(x)=0, x\in(0,1),$$

с начальными условиями в нуле

$$y_1(0)=1, \qquad y_2(0)=0,$$
$$y'_1(0)=0, \qquad y'_2(0)=1.$$

Умножим обе части равенства (3.12) на многочлен $p(\lambda)$, получим

$$p(\lambda)y(x)+p(\lambda)y(0)K(\varphi_1;\lambda)(x)+p(\lambda)y(1)K(\varphi_2;\lambda)(x)+$$
$$\langle p(\lambda)\vec{\mu},K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle=p(\lambda)K(f;\lambda)(x)+ \qquad (3.13)$$
$$p(\lambda)y(0)y_1(x)+p(\lambda)y'(0)y_2(x).$$

Затем из равенства (3.11) находим $p(\lambda)\vec{\mu}$ и подставим в (3.13), получим

$$p(\lambda)y(x)+p(\lambda)y(0)\left(K(\varphi_1;\lambda)(x)-y_1(x)\right)+p(\lambda)y(1)K(\varphi_2;\lambda)(x)-$$
$$\int_0^1 y(t)\langle\vec{P}\left(\vec{Q}(t),\lambda\right),K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle dt-y(0)\langle\vec{P}\left(\vec{A}_1,\lambda\right),K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle-$$
$$y(1)\langle\vec{P}\left(\vec{A}_2,\lambda\right),K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle-p(\lambda)y'(0)y_2(x)=p(\lambda)K(f;\lambda)(x)-$$
$$\langle\vec{P}(\vec{\omega},\lambda),K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle. \qquad (3.14)$$

Умножим обе части равенства (3.14) на $\vec{P}\left(\vec{Q}(x),\lambda\right)$ и проинтегрируем по x от нуля до единицы:

$$\left(p(\lambda)I - \int_0^1 \vec{P}\left(\vec{Q}(x),\lambda\right)K^T(\vec{q};\lambda)(x)dx\right)\vec{C}$$
$$+ C_1\int_0^1 \vec{P}\left(\vec{Q}(x),\lambda\right)\left[p(\lambda)\left(K(\varphi_1;\lambda)(x) - y_1(x)\right)\right.$$
$$\left. - \vec{P}^T\left(\vec{A}_1,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x)\right]dx$$
$$-p(\lambda)C_2\int_0^1 \vec{P}\left(\vec{Q}(x),\lambda\right)y_2(x)dx + C_3\int_0^1 \vec{P}\left(\vec{Q}(x),\lambda\right)\left[p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(x) -\right.$$
$$\left.\vec{P}^T\left(\vec{A}_2,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x)\right]dx = p(\lambda)\int_0^1 \vec{P}\left(\vec{Q}(x),\lambda\right)K(f;\lambda)(x)dx -$$
$$\int_0^1 \vec{P}\left(\vec{Q}(x),\lambda\right)\vec{P}^T(\vec{\omega},\lambda)K(\vec{q};\lambda)(x)dx, \qquad (3.15)$$

где $\vec{C} = \int_0^1 y(t)\vec{P}\left(\vec{Q}(t),\lambda\right)dt$, $C_1 = y(0),\ C_2 = y'(0),\ C_3 = y(1)$.

Представление (3.14) перепишем в новых обозначениях:

$$p(\lambda)y(x) + C_1\left(p(\lambda)\left(K(\varphi_1;\lambda)(x) - y_1(x)\right) - \langle\vec{P}\left(\vec{A}_1,\lambda\right), K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle\right) -$$
$$p(\lambda)C_2y_2(x) + C_3\left(p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(x) - \langle\vec{P}\left(\vec{A}_2,\lambda\right), K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle\right) -$$
$$-\vec{C}K^T(\vec{q};\lambda)(x) = p(\lambda)K(f;\lambda)(x) - \langle\vec{P}(\vec{\omega},\lambda), K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle, \qquad (3.16)$$

Здесь учтено равенство:

$$\int_0^1 y(t)\langle\vec{P}\left(\vec{Q}(t),\lambda\right), K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle dt = \vec{C}^TK(\vec{q};\lambda). \qquad (3.17)$$

Перепишем граничные условия (3.10) в новых обозначениях:

$$\begin{cases} C_1\left[p(\lambda)\beta_{11} - \overrightarrow{\alpha_1}^T\vec{P}\left(\vec{A}_1,\lambda\right)\right] + C_2p(\lambda) + \\ C_3\left[p(\lambda)\beta_{12} - \overrightarrow{\alpha_1}^T\vec{P}\left(\vec{A}_2,\lambda\right)\right] + C_5p(\lambda) - \overrightarrow{\alpha_1}^T\vec{C} + \overrightarrow{\alpha_1}^T\vec{P}(\vec{\omega},\lambda) = 0, \\ C_1\left[p(\lambda)\beta_{21} - \overrightarrow{\alpha_2}^T\vec{P}\left(\vec{A}_1,\lambda\right)\right] + C_3\left[p(\lambda)\beta_{22} - \overrightarrow{\alpha_2}^T\vec{P}\left(\vec{A}_2,\lambda\right)\right] \\ +C_4p(\lambda) + C_6p(\lambda) - \overrightarrow{\alpha_2}^T\vec{C} + \overrightarrow{\alpha_2}^T\vec{P}(\vec{\omega},\lambda) = 0, \end{cases} \qquad (3.18)$$

где $C_4 = y'(1), C_5 = \int_0^1 y(t)\,\Phi_1(t)dt, C_6 = \int_0^1 y(t)\,\Phi_2(t)dt$.

Для исключения из соотношений (3.18) неизвестных C_5 и C_6 запишем два равенства, которые вытекают из (3.16).

$$C_1 \int_0^1 \left(p(\lambda)K(\varphi_1;\lambda)(x) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_1,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x) - p(\lambda)y_1(x)\right)\Phi_1(x)dx$$

$$- p(\lambda)C_2 \int_0^1 y_2(x)\,\Phi_1(x)dx +$$

$$C_3 \int_0^1 \left(p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(x) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_2,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x)\right)\Phi_1(x)dx + p(\lambda)C_5$$

$$- \vec{C}^T \int_0^1 K(\vec{q};\lambda)(x)\Phi_1(x)dx + \vec{P}^T(\vec{\omega},\lambda) \int_0^1 K(\vec{q};\lambda)\,(x)\Phi_1(x)dx$$

$$-p(\lambda)\int_0^1 K(f;\lambda)\,(x)\Phi_1(x)dx = 0. \qquad (3.19)$$

$$C_1 \int_0^1 \left(p(\lambda)K(\varphi_1;\lambda)(x) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_1,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x) - p(\lambda)y_1(x)\right)\Phi_2(x)dx$$

$$- p(\lambda)C_2 \int_0^1 y_2(x)\,\Phi_2(x)dx +$$

$$C_3 \int_0^1 \left(p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(x) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_2,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x)\right)\Phi_2(x)dx + p(\lambda)C_6$$

$$- \vec{C}^T \int_0^1 K(\vec{q};\lambda)(x)\Phi_2(x)dx + \vec{P}^T(\vec{\omega},\lambda) \int_0^1 K(\vec{q};\lambda)\,(x)\Phi_2(x)dx$$

$$- p(\lambda) \int_0^1 K(f;\lambda)\,(x)\Phi_2(x)dx = 0.$$

Используя равенства (3.19), исключим C_5 и C_6 из соотношений (3.18):

$$\begin{cases} \vec{C}\left(\overrightarrow{\alpha_1}^T - \int_0^1 K^T(\vec{q};\lambda)(x)\Phi_1(x)dx\right) + \\ +C_1\left(\int_0^1\left(p(\lambda)K(\varphi_1;\lambda)(x) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_1,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x) - p(\lambda)y_1(x)\right)\Phi_1(x)dx\right. \\ \left.-\left[p(\lambda)\beta_{11} - \overrightarrow{\alpha_1}^T\vec{P}\left(\vec{A}_1,\lambda\right)\right]\right) \\ -p(\lambda)C_2\left(\int_0^1 y_2(x)\,\Phi_1(x)dx + 1\right) + \\ C_3\left(\int_0^1\left(p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(x) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_2,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x)\right)\Phi_1(x)dx\right. \\ \left.-\left[p(\lambda)\beta_{12} - \overrightarrow{\alpha_1}^T\vec{P}\left(\vec{A}_2,\lambda\right)\right]\right) \\ +\vec{P}^T(\vec{\omega},\lambda)\left(\int_0^1 K(\vec{q};\lambda)\,(x)\Phi_1(x)dx - \overrightarrow{\alpha_1}\right) \\ -p(\lambda)\int_0^1 K(f;\lambda)\,(x)\Phi_1(x)dx = 0, \\ \vec{C}\left(\overrightarrow{\alpha_2}^T - \int_0^1 K^T(\vec{q};\lambda)(x)\Phi_2(x)dx\right) + \\ C_1\left(\int_0^1\left(p(\lambda)K(\varphi_1;\lambda)(x) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_1,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x) - p(\lambda)y_1(x)\right)\Phi_2(x)dx\right. \\ \left.-\left[p(\lambda)\beta_{21} - \overrightarrow{\alpha_2}^T\vec{P}\left(\vec{A}_1,\lambda\right)\right]\right) \\ -p(\lambda)C_2\int_0^1 y_2(x)\,\Phi_2(x)dx + \\ C_3\left(\int_0^1\left(p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(x) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_2,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x)\right)\Phi_2(x)dx\right. \\ \left.-\left[p(\lambda)\beta_{22} - \overrightarrow{\alpha_2}^T\vec{P}\left(\vec{A}_2,\lambda\right)\right]\right) - C_4p(\lambda) \\ +\vec{P}^T(\vec{\omega},\lambda)\left(\int_0^1 K(\vec{q};\lambda)\,(x)\Phi_2(x)dx - \overrightarrow{\alpha_2}\right) \\ -p(\lambda)\int_0^1 K(f;\lambda)\,(x)\Phi_2(x)dx = 0. \end{cases} \tag{3.20}$$

Для определения неизвестных C_3 и C_4 нам также понадобятся два равенства, которые вытекают из (3.16). Для этого подставим $x = 1$ в равенство (3.16), тогда получим

$$-\vec{C}\left(K^T(\vec{q};\lambda)(1)\right) + C_1\left(p(\lambda)K(\varphi_1;\lambda)(1) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_1,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(1) - p(\lambda)y_1(1)\right) - p(\lambda)C_2y_2(1) + C_3\left(p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(1) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_2,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(1) + p(\lambda)\right) + \vec{P}^T(\vec{\omega},\lambda)K(\vec{q};\lambda)(1) - p(\lambda)K(f;\lambda)(1) = 0. \tag{3.21}$$

Если сначала продифференцировать по x равенство (3.16), а затем подставить $x = 1$, то получим соотношение

$$-\vec{C}\left(K^T(\vec{q};\lambda)\right)'(1) + C_1\left(p(\lambda)\left(K(\varphi_1;\lambda)\right)'(1) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_1,\lambda\right)\left(K(\vec{q};\lambda)\right)'(1) - p(\lambda)y_1'(1)\right) - p(\lambda)C_2y_2'(1) + C_3\left(p(\lambda)\left(K(\varphi_2;\lambda)\right)'(1) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_2,\lambda\right)\left(K(\vec{q};\lambda)\right)'(1)\right) + p(\lambda)C_4 + \vec{P}^T(\vec{\omega},\lambda)\left(K(\vec{q};\lambda)\right)'(1) - p(\lambda)\left(K(f;\lambda)\right)'(1) = 0. \tag{3.22}$$

Теперь используя (3.22), исключим из системы (3.20) неизвестный параметр C_4. Тогда систему (3.20) можно написать в следующим виде:

$$\begin{cases} \vec{C}\left(\overrightarrow{\alpha_1}^T - \int_0^1 K^T(\vec{q};\lambda)(x)\Phi_1(x)dx\right) + \\ C_1\left(\int_0^1 \left(p(\lambda)K(\varphi_1;\lambda)(x) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_1,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x) - p(\lambda)y_1(x)\right)\Phi_1(x)dx\right. \\ \left. -\left[p(\lambda)\beta_{11} - \overrightarrow{\alpha_1}^T\vec{P}\left(\vec{A}_1,\lambda\right)\right]\right) \\ -p(\lambda)C_2\left(\int_0^1 y_2(x)\,\Phi_1(x)dx + 1\right) + \\ C_3\left(\int_0^1 \left(p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(x) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_2,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x)\right)\Phi_1(x)dx\right. \\ \left. -\left[p(\lambda)\beta_{12} - \overrightarrow{\alpha_1}^T\vec{P}\left(\vec{A}_2,\lambda\right)\right]\right) \\ +\vec{P}^T(\vec{\omega},\lambda)\left(\int_0^1 K(\vec{q};\lambda)\,(x)\Phi_1(x)dx - \overrightarrow{\alpha_1}\right) \\ -p(\lambda)\int_0^1 K(f;\lambda)\,(x)\Phi_1(x)dx = 0, \\ \vec{C}\left(\overrightarrow{\alpha_2}^T - \int_0^1 K^T(\vec{q};\lambda)(x)\Phi_2(x)dx - \left(K^T(\vec{q};\lambda)\right)'(1)\right) + \\ +C_1\left(\int_0^1 \left(p(\lambda)\left(K(\varphi_1;\lambda)(x) - y_1(x)\right) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_1,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x)\right)\Phi_2(x)dx\right. \\ \left. -\left[p(\lambda)\beta_{21} - \overrightarrow{\alpha_2}^T\vec{P}\left(\vec{A}_1,\lambda\right)\right] + \right. \\ \left. +\left(p(\lambda)\left(K(\varphi_1;\lambda)\right)'(1) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_1,\lambda\right)\left(K(\vec{q};\lambda)\right)'(1) - p(\lambda)y_1'(1)\right)\right) - \\ -p(\lambda)C_2\left(\int_0^1 y_2(x)\,\Phi_2(x)dx + y_2'(1)\right) + \\ C_3\left(\int_0^1 \left(p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(x) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_2,\lambda\right)K(\vec{q};\lambda)(x)\right)\Phi_2(x)dx\right. \\ \left. -\left[p(\lambda)\beta_{22} - \overrightarrow{\alpha_2}^T\vec{P}\left(\vec{A}_2,\lambda\right)\right] + \right. \\ \left. +\left(p(\lambda)\left(K(\varphi_2;\lambda)\right)'(1) - \vec{P}^T\left(\vec{A}_2,\lambda\right)\left(K(\vec{q};\lambda)\right)'(1)\right)\right) \\ +\vec{P}^T(\vec{\omega},\lambda)\left(\int_0^1 K(\vec{q};\lambda)\,(x)\Phi_2(x)dx - \overrightarrow{\alpha_2} + \left(K(\vec{q};\lambda)\right)'(1)\right) \\ -p(\lambda)\left(\int_0^1 K(f;\lambda)\,(x)\Phi_2(x)dx + \left(K(f;\lambda)\right)'(1)\right) = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

Объединим соотношения (3.16), (3.21), (3.23), (3.15) в одну расширенную систему относительно вектор-столбца $\vec{D} = \left(\vec{C}^T \quad C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad (-1)\right)^T$. Для того, чтобы записать расширенную систему необходимы новые обозначения. Сначала введем квадратную матрицу R размерности $(s+4)$ по следующим формулам.

$$R_{1,j} = -\int_0^x g(x,\tau,\lambda)q_j(\tau)d\tau\,, j = 1,\dots,s,$$

$$R_{1,s+1} = p(\lambda)\left(K(\varphi_1;\lambda)(x) - y_1(x)\right) - \langle\vec{P}\left(\vec{A}_1,\lambda\right), K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle,$$

$$R_{1,s+2} = -y_2(x),$$

$$R_{1,s+3} = p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(x) - \langle\vec{P}\left(\vec{A}_2,\lambda\right), K(\vec{q};\lambda)(x)\rangle,\ R_{1,s+4} = g(x,t).$$

Введем вектор-строку $\vec{R}_1{}^T(x) = \left[R_{1,1}, \dots, R_{1,s+4}\right]$, зависящую от x. Отметим, что на самом деле $\vec{R}_1{}^T(x)$ зависит также от параметров (t, λ). Тогда вторая строка матрицы R примет вид

$$\vec{R}_2{}^T = \vec{R}_1{}^T(1).$$

Третья строка матрицы R записывается в виде

$$\vec{R}_3{}^T = \int_0^1 \vec{R}_1{}^T(\tau)\Phi_1(\tau)d\tau.$$

Четвертая строка матрицы R записывается в виде

$$\vec{R}_4{}^T = \int_0^1 \vec{R}_1{}^T(\tau)\Phi_2(\tau)d\tau + \frac{d}{dx}\vec{R}_1{}^T(x)\Big|_{x=1}.$$

Последующие строки с номерами $k = 5, \dots, s+4$ примут вид

$$\vec{R}_k{}^T = p(\lambda)\vec{e}_k^T - \int_0^1 \vec{R}_1{}^T(\tau)P_{k-4}\left(\vec{Q}(\tau), \lambda\right)d\tau,$$

где $\vec{e}_k^T$-вектор-строка размерности $(s+4)$. Все элементы вектора $\vec{e}_k^T$ нулевые, кроме одного.

Элемент с номером $k-4$ считаем равным единицу. Таким образом, мы определили матрицу R, состоящую из строк $\vec{R}_j{}^T, j = 1, \dots, s+4$.

Введем также квадратную матрицу Z размерности $(s+4)$, причем строки с номерами $1,5,6, \dots, s+4$ являются нулевыми. Строки с ненулевыми элементами определяются следующим образом. Во второй строке $\vec{Z}_2{}^T$ все элементы нулевые, кроме одного:

$$Z_{2,s+3} = p(\lambda).$$

Элементы третьей $\vec{Z}_3{}^T$ и четвертой $\vec{Z}_4{}^T$ строки задаются по формулам:

$$Z_{3,j} = \alpha_{1,j}, \qquad Z_{4,j} = \alpha_{2,j}, \qquad j = 1, \dots, s,$$

$$Z_{3,s+1} = -\left[p(\lambda)\beta_{11} - \overrightarrow{\alpha_1}^T\vec{P}\left(\vec{A}_1, \lambda\right)\right],$$

$$Z_{4,s+1} = -\left[p(\lambda)\beta_{21} - \overrightarrow{\alpha_2}^T\vec{P}\left(\vec{A}_1, \lambda\right)\right],$$

$$Z_{3,s+2} = -1, \qquad Z_{4,s+2} = 0,$$

$$Z_{3,s+3} = -\left[p(\lambda)\beta_{12} - \overrightarrow{\alpha_1}^T \vec{P}\left(\vec{A}_2, \lambda\right)\right], \qquad Z_{4,s+3} = -\left[p(\lambda)\beta_{22} - \overrightarrow{\alpha_2}^T \vec{P}\left(\vec{A}_2, \lambda\right)\right],$$

$$Z_{3,s+4} = 0, \ Z_{4,s+4} = 0.$$

Наконец, пусть элемент $R_{1,s+4} = 0$ и через $h_1(x,t,\lambda)$ обозначим сумму матриц R и Z. Наряду с матрицей $h_1(x,t,\lambda)$ введем матрицу $h_{2j}(x,\lambda)$. При $j = 1, \dots, s$ матрица $h_{2j}(x,\lambda)$ получается из матрицы $h_1(x,t,\lambda)$, если ее последний столбец заменить на столбец $\overrightarrow{W_j}$. Элементы столбца $\overrightarrow{W_j}$ определяются по формулам

$$W_{1j} = 0, W_{2j} = -K\left(q_j;\lambda\right)(1),$$

$$W_{3j} = -\left(\int_0^1 K\left(q_j;\lambda\right)(\tau)\Phi_1(\tau)d\tau - \alpha_{1j}\right),$$

$$W_{4j} = -\left(\int_0^1 K\left(q_j;\lambda\right)(\tau)\Phi_2(\tau)d\tau - \alpha_{2j} - \left(K\left(q_j;\lambda\right)\right)'(1)\right),$$

$$W_{kj} = -\int_0^1 P_{k-4}\left(\vec{Q}(\tau),\lambda\right)K\left(q_j;\lambda\right)(\tau)d\tau, \qquad k = 5, \dots, s+4.$$

Важную роль играют определители матриц $h_1(x,t,\lambda)$, $h_{2j}(x,\lambda)$. Пусть

$$\mathcal{H}_1(x,t,\lambda) = deth_1(x,t,\lambda), \mathcal{H}_{2j}(x,\lambda) = deth_{2j}(x,\lambda), j = 1, \dots, s.$$

Введем вектор-строку:

$$\overrightarrow{\mathcal{H}_2^T}(x,\lambda) = (\mathcal{H}_{2,1}(x,\lambda) \quad \mathcal{H}_{2,2}(x,\lambda) \quad \cdots \quad \mathcal{H}_{2,s}(x,\lambda)).$$

Наряду с указанными определителями нам важен определитель, который обозначим через $\Delta(\lambda)$. Опеределитель $\Delta(\lambda)$ равен определителю, который получается из матрицы $h_1(x,t,\lambda)$ зачеркиванием ее первой строки и последнего столбца.

Введем вектор-столбец $\vec{U}$. Элементы столбца $\vec{U}$ определяются по формулам

$$U_1 = -p(\lambda)y(x) + p(\lambda)K(f;\lambda)(x) - \sum_{j=1}^{s} P_j(\vec{\omega},\lambda)K\big(q_j;\lambda\big)(x),$$

$$U_2 = \sum_{j=1}^{s} P_j(\vec{\omega},\lambda)\, W_{2j} + p(\lambda)K(f;\lambda)(1),$$

$$U_3 = \sum_{j=1}^{s} P_j(\vec{\omega},\lambda)\, W_{3j} + p(\lambda)\int_0^1 K(f;\lambda)\,(\tau)\Phi_1(\tau)d\tau,$$

$$U_4 = \sum_{j=1}^{s} P_j(\vec{\omega},\lambda)\, W_{4j} + p(\lambda)\left(\int_0^1 K(f;\lambda)\,(\tau)\Phi_2(\tau)d\tau + \big(K(f;\lambda)\big)'(1)\right),$$

$$U_k = \sum_{j=1}^{s} P_j(\vec{\omega},\lambda)\, W_{kj} + p(\lambda)\int_0^1 P_j\big(\vec{Q}(\tau),\lambda\big)\, K(f;\lambda)(\tau)d\tau, \quad k = 5,\dots,s+4.$$

Наряду с матрицей $h_1(x,t,\lambda)$ введем матрицу $h(x,t,\lambda)$. Матрица $h(x,t,\lambda)$ получается из матрицы $h_1(x,t,\lambda)$, если ее последний столбец заменить на столбец $\vec{U}$. Тогда расширенная система пишется в следующим в виде:

$$h(x,t,\lambda)\cdot\vec{D} = \vec{0}, \tag{3.24}$$

где $\vec{D} = \big(\vec{C}^T \quad C_1 \quad C_2 \quad \mathrm{C}_3 \quad (-1)\big)^T$.

Поскольку вектор $\vec{D}$ в системе однородных линейных алгебраических уравнений (3.24) не является нулевым вектором, поэтому определитель системы (3.24)

$$deth(x,t,\lambda) = 0.$$

Из последнего соотношения, используя обозначения $\Delta(\lambda)$ и $\mathcal{H}_1(x,t,\lambda), \vec{\mathcal{H}}_2^T$, запишем $y(x)$ в виде:

$$y(x,\lambda) = -\int_0^x g(x,t,\lambda)f(t)dt + (-1)^s \int_0^1 \frac{\mathcal{H}_1(x,t,\lambda)}{\Delta(\lambda)} f(t)dt +$$

$$\int_0^x g(x,t,\lambda)\vec{q}^T(t)dt\cdot(P-\lambda I)^{-1}\vec{\omega} + (-1)^s \frac{\vec{\mathcal{H}}_2^T(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}(P-\lambda I)^{-1}\vec{\omega}. \tag{3.25}$$

Затем из соотношений (3.11) вычислим неизвестный вектор $\vec{\mu}$ согласно равенствам:

$$\vec{\mu}(\lambda) = (P - \lambda I)^{-1}\vec{\omega} - \int_0^1 y(t,\lambda)(P - \lambda I)^{-1}\vec{Q}(t)\ dt - y(0,\lambda)(P - \lambda I)^{-1}\vec{A}_1 - y(1,\lambda)(P - \lambda I)^{-1}\vec{A}_2, \quad (3.26)$$

где значения $y(x,\lambda), y(0,\lambda), y(1,\lambda)$ вычисляются по формуле (3.25).

Теорема 3.3. Формулы (3.25) и (3.26) задают представления резольвенты $(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}$ в пространстве $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$:

$$(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}: \begin{pmatrix} f(x) \\ \vec{\omega} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y(x) \\ \vec{\mu} \end{pmatrix},$$

при тех λ, когда $p(\lambda)\Delta(\lambda) \neq 0$.

Приведем примеры, которые иллюстрируют указанные представления.

3.7. Пример 4 (продолжение примера 1). Представление резольвенты в случае распадения оператора на дифференциальный и матричный операторы.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} l(y;\ \vec{\mu}) \equiv \frac{d^2y(x)}{dx^2} + r_0(x)y(x) = \lambda y(x) + f(x), \\ \vec{\theta}(y;\ \vec{\mu}) \equiv P\vec{\mu} = \lambda\vec{\mu} + \vec{\omega}, \end{cases} \quad (3.27)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} V_1(y,\vec{\mu}) \equiv y'(0) + y(0)\beta_{11} + y(1)\beta_{12} = 0, \\ V_2(y,\vec{\mu}) \equiv y'(1) + y(0)\beta_{21} + y(1)\beta_{22} = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Для решения задачи (3.27),(3.28) согласно выше приведенному алгоритму надо составит матрицу $h_1(x,t,\lambda)$. Для данного примера матрица $h_1(x,t,\lambda)$ имеет блочную структуру

$$h_1(x,t,\lambda) = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix},$$

где матрица S_1 размерности $4 \times s$, все компоненты этой матрицы равны нулю; а матрица S_2 размерности 4×4, причем

$$S_2 = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & 0 & 0 \\ y_1(1) & y_2(1) & -1 & g(1,t) \\ \beta_{11} & 1 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} - y_1'(1) & y_2'(1)\beta_{22} & & g'(1,t) \end{pmatrix},$$

также матрица S_3 размерности $s \times s$, все диагональные элементы равны $p(\lambda)$, а все остальные компоненты равны нулю; а матрица S_4 размерности $s \times 4$, все элементы этой матрицы равны нулю. Отметим, что

$$\mathcal{H}_1(x,t,\lambda) = deth_1(x,t,\lambda) = \big(p(\lambda)\big)^s detS_2.$$

Согласно теореме 3.3 решение задачи (3.27), (3.28) примет вид

$$\begin{cases} y(x,\lambda) = -\int_0^x g(x,t)f(t)dt - \int_0^1 \frac{\mathcal{H}_1(x,t,\lambda)}{\Delta(\lambda)} f(t)dt, \\ \vec{\mu} = (P-\lambda I)^{-1}\vec{\omega}, \end{cases} \tag{3.29}$$

где

$$\Delta(\lambda) = \big(p(\lambda)\big)^s \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) & -1 \\ \beta_{11} & 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} - y_1'(1) & y_2'(1) & \beta_{22} \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{H}_1(x,t,\lambda) = \big(p(\lambda)\big)^s \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & 0 & 0 \\ y_1(1) & y_2(1) & -1 & g(1,t) \\ \beta_{11} & 1 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} - y_1'(1) & y_2'(1) & \beta_{22} & g'(1,t) \end{vmatrix}.$$

В то же время согласно монографии [47] решение задачи (3.27), (3.28) будет в следующем виде:

$$\begin{cases} y(x,\lambda) = -\int_0^x g(x,t)f(t)dt + \int_0^1 \frac{\widetilde{\mathcal{H}}_1(x,t,\lambda)}{\delta(\lambda)} f(t)dt, \\ \vec{\mu} = (P-\lambda I)^{-1}\vec{\omega}, \end{cases} \tag{3.30}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1(x,t,\lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & 0 \\ \beta_{11} + y_1(1)\beta_{12} & 1 + y_2(1)\beta_{12} & \beta_{12}g(1,t) \\ y_1'(1) + \beta_{21} + y_1(1)\beta_{22} & y_2'(1) + y_2(1)\beta_{22} & g'(1,t) + \beta_{22}g(1,t) \end{vmatrix},$$

$$\delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \beta_{11} + y_1(1)\beta_{12} & 1 + y_2(1)\beta_{12} \\ y_1'(1) + \beta_{21} + y_1(1)\beta_{22} & y_2'(1) + y_2(1)\beta_{22} \end{vmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) & -1 \\ \beta_{11} & 1 & \beta_{12} \\ \beta_{21} - y_1'(1) & y_2'(1) & \beta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_{11} + y_1(1)\beta_{12} & 1 + y_2(1)\beta_{12} \\ y_1'(1) + \beta_{21} + y_1(1)\beta_{22} & y_2'(1) + y_2(1)\beta_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & 0 & 0 \\ y_1(1) & y_2(1) & -1 & g(1,t) \\ \beta_{11} & 1 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} - y_1'(1) & y_2'(1) & \beta_{22} & g'(1,t) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & 0 \\ \beta_{11} + y_1(1)\beta_{12} & 1 + y_2(1)\beta_{12} & \beta_{12}g(1,t) \\ y_1'(1) + \beta_{21} + y_1(1)\beta_{22} & y_2'(1) + y_2(1)\beta_{22} & g'(1,t) + \beta_{22}g(1,t) \end{vmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что решение задаваемое по формуле (3.29), совпадает с решением вычисленным по формуле (3.30).

3.8. Пример 5. (продолжение примера 2) Представление резольвенты в случае слабого граничного взаимодействия дифференциального и матричного операторов.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} l(y;\ \vec{\mu}) \equiv \frac{d^2y(x)}{dx^2} + r_0(x)y(x) + \varphi_1(x)y(0) + \varphi_2(x)y(1) = \lambda y(x) + f(x), \\ \vec{\theta}(y;\ \vec{\mu}) \equiv P\vec{\mu} + \overrightarrow{A_1}y(0) + \overrightarrow{A_2}y(1) = \lambda\vec{\mu} + \vec{\omega}, \end{cases} \quad (3.30)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} V_1(y,\vec{\mu}) \equiv y'(0) + y(0)\beta_{11} + y(1)\beta_{12} + \int_0^1 y(t)\Phi_1(t)dt + \vec{\alpha}_1^T\vec{\mu} = 0, \\ V_2(y,\vec{\mu}) \equiv y'(1) + y(0)\beta_{21} + y(1)\beta_{22} + \int_0^1 y(t)\Phi_2(t)dt + \vec{\alpha}_2^T\vec{\mu} = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

Для данного примера матрица R имеет блочную структуру

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix},$$

где матрица R_1 размерности $4 \times s$, все компоненты этой матрицы равны нулю; а матрица R_2 размерности 4×4, причем R_2 равен следующему:

$$\begin{pmatrix} p(\lambda)\big(K(\varphi_1;\lambda)(x) - y_1(x)\big) & -y_2(x) & p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(x) & 0 \\ p(\lambda)\big(K(\varphi_1;\lambda)(1) - y_1(1)\big) & -y_2(1) & p(\lambda)K(\varphi_2;\lambda)(1) & g(1,t) \\ p(\lambda)\int_0^1 \big(K(\varphi_1;\lambda)(\tau) - y_1(\tau)\big)\Phi_1(\tau)\,d\tau - \int_0^1 y_2(\tau)\Phi_1(\tau)d\tau p(\lambda) & & \int_0^1 \big(K(\varphi_2;\lambda)(\tau)\big)\Phi_1(\tau)\,d\tau & \int_t^1 g(\tau,t)\Phi_1(\tau)d\tau \\ p(\lambda)\int_0^1 \big(K(\varphi_1;\lambda)(\tau) - y_1(\tau)\big)\Phi_2(\tau)\,d\tau - \int_0^1 y_2(\tau)\Phi_2(\tau)d\tau p(\lambda) & & \int_0^1 \big(K(\varphi_2;\lambda)(\tau)\big)\Phi_2(\tau)\,d\tau & \int_t^1 g(\tau,t)\Phi_2(\tau)d\tau + g'(1,t) \end{pmatrix},$$

матрица R_3 размерности $s \times s$, все диагональные элементы равны $p(\lambda)$, а все остальные компоненты равны нулю; а матрица R_4 размерности $s \times 4$, все элементы этой матрицы равны нулю.

Для данного примера матрица Z имеет блочную структуру

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{bmatrix},$$

где матрица Z_1 размерности $4 \times s$, первые две строки которой нулевые; а матрица Z_2 размерности 4×4, причем

$$Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(\lambda) & 0 \\ -\left[p(\lambda)\beta_{11} - \overrightarrow{\alpha_1}^T \vec{P}(\vec{A}_1, \lambda)\right] & -1 & -\left[p(\lambda)\beta_{12} - \overrightarrow{\alpha_1}^T \vec{P}(\vec{A}_2, \lambda)\right] & 0 \\ -\left[p(\lambda)\beta_{21} - \overrightarrow{\alpha_2}^T \vec{P}(\vec{A}_1, \lambda)\right] & 0 & -\left[p(\lambda)\beta_{22} - \overrightarrow{\alpha_2}^T \vec{P}(\vec{A}_2, \lambda)\right] & 0 \end{pmatrix},$$

также Z_3-нулевая матрица размерности $s \times s$; а матрица Z_4 размерности $s \times 4$, все элементы которой равны нулю.

Тогда матрица $h_1(x, t, \lambda) = R + Z$ имеет блочную структуру:

$$h_1(x, t, \lambda) = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{bmatrix},$$

где матрица S_3 совпадает с матрицей R_3; а матрица S_4 является нулевой матрицей.

Отметим, что

$$\mathcal{H}_1(x, t, \lambda) = deth_1(x, t, \lambda) = \big(p(\lambda)\big)^s detS_2.$$

где матрица $S_2 = R_2 + Z_2$.

Введем при $j = 1, \dots, s + 4$ матрицу $\tilde{S}_{2j}$, которая получается из матрицы S_2, заменой ее последнего столбца на столбец $(0 \quad 0 \quad \alpha_{1k} \quad \alpha_{2k})^T, k = 1, \dots, s$. В данном примере

$$\mathcal{H}_{2j}(x, \lambda) = deth_{2j}(x, \lambda) = \big(p(\lambda)\big)^s det\tilde{S}_{2j}, \qquad j = 1, \dots, s + 4.$$

Введем вектор-строку:

$$\overrightarrow{\mathcal{H}_2}^T(x, \lambda) = (\mathcal{H}_{2,1}(x, \lambda) \quad \mathcal{H}_{2,2}(x, \lambda) \quad \cdots \quad \mathcal{H}_{2,s+4}(x, \lambda)).$$

Тогда согласно теореме 3.3 решение задачи (3.30), (3.31) будет в следующем виде:

$$y(x,\lambda) = \int_0^x g(x,t,\lambda)f(t)dt + (-1)^{s+1}\int_0^1 \frac{\mathcal{H}_1(x,t,\lambda)}{\Delta(\lambda)}f(t)dt + (-1)^{s+1}\frac{\vec{\mathcal{H}}_2^T(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}(P-\lambda I)^{-1}\vec{\omega}, \qquad (3.32)$$

где $\Delta(\lambda) = \big(p(\lambda)\big)^s\tilde{\Delta}(\lambda)$.

Здесь опеределитель $\tilde{\Delta}(\lambda)$ равен определителю, который получается из матрицы S_2 зачеркиванием ее первой строки и последнего столбца.

Теперь вычислим неизвестный вектор $\vec{\mu}$:

$$\vec{\mu} = (P-\lambda I)^{-1}\vec{\omega} - y(0,\lambda)(P-\lambda I)^{-1}\vec{A}_1 - y(1,\lambda)(P-\lambda I)^{-1}\vec{A}_2,$$

где значения $y(0,\lambda), y(1,\lambda)$ вычисляются по формуле (3.32).

3.9. Аналитические свойства резольвенты.

Функции $\Delta(\lambda)$, $\mathcal{H}_1(x,t,\lambda)$, $\vec{\mathcal{H}}_2^T(x,\lambda)$ в формулах (3.25) и (3.26) являются целыми функциями параметра λ. Поэтому из теоремы 3.3 следует, что резольвента $(\mathcal{L}-\lambda I)^{-1}$ есть мероморфная функция параметра λ. Ее полюсами могут быть нули $p(\lambda)\cdot\Delta(\lambda)$.

Для дальнейших целей, запишем $\mathcal{H}_1(x,t,\lambda)$, $\mathcal{H}_{2j}(x,\lambda)$ в следующем в виде:

$$\mathcal{H}_1(x,t,\lambda) = (-1)^s\sum_{k=2}^{s+4} R_{k,s+4}(t,\lambda)\varkappa_{k-1}(x,\lambda),$$

$$\mathcal{H}_{2j}(x,\lambda) = (-1)^s\sum_{k=2}^{s+4} W_{kj}(\lambda)\varkappa_{k-1}(x,\lambda),$$

где $\varkappa_k(x,\lambda), k = 1,\dots,s+3$ определитель, который получается из определителя $\Delta(\lambda)$ заменой его k-ую строку на строку

$$[R_{11}(x)\cdots R_{1s+3}(x)].$$

Перепишем равенство (3.25) в новых обозначениях:

$$y(x,\lambda) = -\int_0^x g(x,t,\lambda)f(t)dt + (-1)^s \sum_{k=2}^{s+4} \frac{\varkappa_{k-1}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^1 R_{k,s+4}(t,\lambda)\, f(t)dt$$

$$+ \int_0^x g(x,t,\lambda)\vec{q}^T(t)dt \cdot (P-\lambda I)^{-1}\vec{\omega}$$

$$+(-1)^s \sum_{k=2}^{s+4} \frac{\varkappa_{k-1}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \cdot \langle \vec{W}_k^T, (P-\lambda I)^{-1}\vec{\omega}\rangle_{\mathbb{C}^s}. \qquad (3.33)$$

Если в соотношение (3.26) подставить представления (3.33), то вектор $\vec{\mu}(\lambda)$ будеть зависеть от $\varkappa_1(x,\lambda), \dots, \varkappa_{S+3}(x,\lambda)$. Эта зависимость существенно используется при вычислений вычетов в полюсах вектора $\vec{\mu}(\lambda)$.

Пусть λ_0 простой нуль $\Delta(\lambda)$, то есть

$$\Delta(\lambda_0) = 0, \Delta'(\lambda_0) \neq 0.$$

Для простоты считаем, что $p(\lambda_0) \neq 0$.

Тогда вычет в простом полюсе вычисляется по формулам:

$$\mathbf{res}_{\boldsymbol{\lambda_0}} \big(\boldsymbol{y(x,\lambda)}\big) = (-1)^s \sum_{k=2}^{s+4} \frac{\varkappa_{k-1}(x,\lambda_0)}{\Delta'(\lambda_0)} \Big(\int_0^1 R_{k,s+4}(t,\lambda_0)\, f(t)dt - \langle (P-\lambda_0 I)^{-1}\vec{\omega}; \vec{W}_k(\lambda_0)\rangle \Big) \qquad (3.34)$$

$$\mathbf{res}_{\boldsymbol{\lambda_0}}\big(\vec{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\lambda})\big) = -\int_0^1 \mathbf{res}_{\boldsymbol{\lambda_0}} \big(\boldsymbol{y(t,\lambda)}\big)(P-\lambda_0 I)^{-1}\vec{Q}(t)\ dt +$$

$$-\mathbf{res}_{\boldsymbol{\lambda_0}}\big(y(0,\lambda)\big)(P-\lambda_0 I)^{-1}\vec{A}_1 \qquad (3.35)$$

$$-\mathbf{res}_{\boldsymbol{\lambda_0}}\big(y(1,\lambda)\big)(P-\lambda_0 I)^{-1}\vec{A}_2.$$

Так как λ_0 простой нуль характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ и $p(\lambda_0) \neq 0$, то λ_0 может быть только простым полюсом вектора $\begin{pmatrix} y(x,\lambda) \\ \vec{\mu}(\lambda) \end{pmatrix}$. Поэтому справедливо представление Лорана в окрестности $\lambda = \lambda_0$:

$$\begin{cases} y(x,\lambda) = \dfrac{\mathop{\mathbf{res}}\limits_{\lambda_0}\left(\boldsymbol{y(x,\lambda)}\right)}{\lambda-\lambda_0} + G_1, \\ \vec{\mu}(\lambda) = \dfrac{\mathop{\mathbf{res}}\limits_{\lambda_0}\left(\vec{\mu}(\lambda)\right)}{\lambda-\lambda_0} + \vec{\mu}_1, \end{cases}$$

где $G_1, \vec{\mu}_1$-регулярна в окрестности точки λ_0.

Теперь эти представления подставим в соотношения (3.9), (3.10):

$$\begin{cases} l(y(x,\lambda);\ \vec{\mu}(\lambda)) = \lambda y(x,\lambda) + f(x), \\ \vec{\theta}(y(x,\lambda);\ \vec{\mu}(\lambda)) = \lambda\vec{\mu}(\lambda) + \vec{\omega}, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} V_1(y(x,\lambda);\ \vec{\mu}(\lambda)) = 0, \\ V_2(y(x,\lambda);\ \vec{\mu}(\lambda)) = 0. \end{cases}$$

Затем полученные соотношения умножим на $(\lambda-\lambda_0)$ и вычислим пределы при $\lambda \to \lambda_0$. В результате получим:

$$\begin{cases} l\left(\mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0}\left(y(x,\lambda)\right)\right) = \lambda_0 \mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0}\left(y(x,\lambda)\right), \\ \vec{\theta}\left(\mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0}\left(\vec{\mu}(\lambda)\right)\right) = \lambda_0 \mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0}\left(\vec{\mu}(\lambda)\right), \end{cases} \tag{3.36}$$

и

$$\begin{cases} V_1\left(\mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0}\left(y(x,\lambda)\right);\ \mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0}\left(\vec{\mu}(\lambda)\right)\right) = 0, \\ V_2\left(\mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0}\left(y(x,\lambda)\right);\ \mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0}\left(\vec{\mu}(\lambda)\right)\right) = 0. \end{cases} \tag{3.37}$$

Соотношения (3.36), (3.37) справедливы при любых $f(x) \in L_2(0,1), \vec{\omega} \in \mathbb{C}^s$.

Таким образом, если вектор $\begin{pmatrix} \mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0} y(x,\lambda) \\ \mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0} \vec{\mu}(\lambda) \end{pmatrix} \neq 0$, то $\begin{pmatrix} \mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0} y(x,\lambda) \\ \mathop{\mathrm{res}}\limits_{\lambda_0} \vec{\mu}(\lambda) \end{pmatrix}$ является собственным вектором задачи (3.9), (3.10) соответствующим собственному значению λ_0. Поскольку в соотношениях (3.36), (3.37) функция $f(x)$ произвольный элемент $L_2(0,1)$, вектор $\vec{\omega}$-произвольный вектор из $\mathbb{C}^s$, то

осуществим их выбор по своему усмотрению. В соотношениях (3.34), (3.35) положим $f(x) \equiv 0$. Выбор вектора $\vec{\omega}$ произведем в зависимости от линейной оболочки системы векторов $\overrightarrow{W_2}, \dots, \overrightarrow{W_{s+4}}$ в пространстве $\mathbb{C}^s$. Допустим, что подсистема $\{\overrightarrow{W_2}, \dots, \overrightarrow{W_{s+1}}\}$ линейна независимая система векторов, а вектора

$$\overrightarrow{W_{s+j}} = \zeta_j \cdot \overrightarrow{W_{s+1}}, j = 2,3,4,$$

где ζ_j-некоторые числа. Выберем вектор $\vec{\omega}_2$ так, чтобы

$$\langle (P - \lambda_0 I)^{-1} \vec{\omega}_2; \overrightarrow{W_2}(\lambda_0) \rangle = 1, \langle (P - \lambda_0 I)^{-1} \vec{\omega}_2; \overrightarrow{W_j}(\lambda_0) \rangle = 0, j = 3, \dots, s+1.$$

Правые части формул (3.34) и (3.35) при $f(x) \equiv 0$ и $\vec{\omega} = \vec{\omega}_2$ задают следующий собственный вектор задачи (3.9), (3.10)

$$\overrightarrow{\Psi_1}(x, \lambda_0) = \begin{pmatrix} \varkappa_1(x, \lambda_0) \\ \int_0^1 \varkappa_1(t, \lambda_0)(P - \lambda_0 I)^{-1} \vec{Q}(t) dt + \varkappa_1(0, \lambda_0)(P - \lambda_0 I)^{-1} \vec{A}_1 + \varkappa_1(1, \lambda_0)(P - \lambda_0 I)^{-1} \vec{A}_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь выберем вектор $\vec{\omega}_3$ следующим образом:

$$\langle (P - \lambda_0 I)^{-1} \vec{\omega}_3; \overrightarrow{W_3}(\lambda_0) \rangle = 1, \langle (P - \lambda_0 I)^{-1} \vec{\omega}_3; \overrightarrow{W_j}(\lambda_0) \rangle = 0,$$

$$j = 2,4,5, \dots, s+1.$$

В таком случае правые части формул (3.34) и (3.35) приводят к следующему собственному вектору

$$\overrightarrow{\Psi_2}(x, \lambda_0) =$$

$$\begin{pmatrix} \varkappa_2(x, \lambda_0) \\ \int_0^1 \varkappa_2(t, \lambda_0)(P - \lambda_0 I)^{-1} \vec{Q}(t) dt + \varkappa_2(0, \lambda_0)(P - \lambda_0 I)^{-1} \vec{A}_1 + \varkappa_2(1, \lambda_0)(P - \lambda_0 I)^{-1} \vec{A}_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку λ_0-простое собственное значение, то $\overrightarrow{\Psi_1}(x, \lambda_0)$ и $\overrightarrow{\Psi_2}(x, \lambda_0)$ пропорциональны, то есть существует константа Ξ_2 такая, что

$$\overrightarrow{\Psi_2}(x, \lambda_0) = \Xi_2 \cdot \overrightarrow{\Psi_1}(x, \lambda_0).$$

Кстати, константу Ξ_2 можно вычислить сравнивая функции $\varkappa_1(x, \lambda_0)$ и $\varkappa_2(x, \lambda_0)$, то есть

$$\varkappa_2(x, \lambda_0) = \Xi_2 \cdot \varkappa_1(x, \lambda_0). \quad (3.38)$$

Продолжая подобные рассуждения, можно найти числа $\Xi_3, \dots, \Xi_{s-1}$:

$$\varkappa_j(x,\lambda_0) = \Xi_j \cdot \varkappa_1(x,\lambda_0), j = 3,\dots,s-1. \quad (3.39)$$

Теперь выберем вектор $\vec{\omega}_{s+1}$ так, что

$$\langle (P-\lambda_0 I)^{-1}\vec{\omega}_{s+1}; \overrightarrow{W}_{s+1}(\lambda_0)\rangle = 1, \langle (P-\lambda_0 I)^{-1}\vec{\omega}_{s+1}; \overrightarrow{W_j}(\lambda_0)\rangle = 0,$$

$$j = 2,\dots,s.$$

Далее в правую часть (3.34) и (3.35) подставим $f(t) = \delta(t-\xi)$ при любом $\xi \in [0,1]$, а вектор $\vec{\omega}$ возьмем нулевым. Затем выбирая значения $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ из промежутка $[0,1]$ так, чтобы выполнялись соотношения:

$$R_{s+j,s+4}(\xi_k,\ \lambda_0) = \delta_{jk},\ j,k = 1,\dots,4, \quad (3.40)$$

здесь δ_{jk}—символ Кронекера.

Отсюда вытекает существование констант Ξ_j таких, что

$$\varkappa_j(x,\lambda_0) = \Xi_j \cdot \varkappa_1(x,\lambda_0), j = s,\dots,s+3. \quad (3.41)$$

Теперь покажем как вычисляются собственные векторы сопряженной задачи к задаче (3.9), (3.10). Учитывая соотношения (3.38), (3.39), (3.41), из (3.34) вытекает соотношение

$$\operatorname*{res}_{\lambda_0}\big(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})\big) = \int_0^1 z_1(\xi,\lambda_0) f(\xi) d\xi \cdot \varkappa_1(x,\lambda_0)$$

$$+ (-1)^{s+1} \sum_{k=2}^{s+4} \frac{\varkappa_1(x,\lambda_0)\Xi_{k-1}}{\Delta'(\lambda_0)} \Big(\big(P^* - \overline{\lambda_0} I\big)^{-1} \overrightarrow{W}_k(\lambda_0) \Big)^T \cdot \vec{\omega},$$

Отсюда следует, что собственный вектор сопряженной задачи к задаче (3.9), (3.10) при всех $\xi \in [0,1]$

$$\vec{\mathrm{Z}}_1(\xi,\lambda_0) = \begin{pmatrix} z_1(\xi,\lambda_0) \\ (-1)^{s+1} \sum_{k=2}^{s+4} \dfrac{\Xi_{k-1}}{\Delta'(\lambda_0)} (P^* - \lambda_0 I)^{-1} \overrightarrow{W}_k(\lambda_0) \end{pmatrix},$$

здесь $z_1(\xi,\lambda_0) = \sum_{k=2}^{s+4} \frac{R_{k,s+4}(\xi,\lambda_0)\Xi_{k-1}}{\Delta'(\lambda_0)}$.

Таким образом, если λ_0 простой нуль характеристического опеределителя $\Delta(\lambda)$, причем $p(\lambda_0) \neq 0$, то собственный вектор $\overrightarrow{\Psi}_1(x,\lambda_0)$ задачи (3.9)-(3.10) и собственный вектор $\vec{\mathrm{Z}}_1^{\,T}(\xi,\lambda_0)$ сопряженной задачи определяются по вышеприведенным формулам.

Теперь предположим, что матрица P имеет только простые собственные значения. Из работы [80] следует, что матрица P имеет представление

$$(P-\lambda I)^{-1}=-\sum_{l=0}^{s-1}\frac{1}{(\lambda-\lambda_l)}\vec{u}_l\vec{v}_l^{\,T}, \tag{3.42}$$

где $\vec{u}_l$-собственный вектор матрицы P и он соответствует собственному значению λ_l. Вектор $\vec{v}_l$ является собственным вектором сопряженной матрицы P^*, причем скалярное произведение векторов $\vec{u}_l$ и $\vec{v}_l$ равно единице.

Тогда можно вычислить собственные вектора задачи (3.9), (3.10) в случае, когда λ_0 является простым нулем многочлена $p(\lambda)$, но не является нулем характеристического определителя $\Delta(\lambda_0)\neq 0$. Заметим, что таких нулей конечное число. Для дальнейших целей, перепишем равенство (3.25) в следующем в виде:

$$y(x,\lambda)=-\int_0^x g(x,t,\lambda)f(t)dt+\ (-1)^s\int_0^1\frac{\mathcal{H}_1(x,t,\lambda)}{\Delta(\lambda)}f(t)dt+\vec{\widetilde{\mathcal{H}}}_2^{\,T}(x,\lambda)\cdot (P-\lambda I)^{-1}\overrightarrow{\omega}, \tag{3.43}$$

где $\vec{\widetilde{\mathcal{H}}}_2^{\,T}(x,\lambda)=\left(\int_0^x g(x,t,\lambda)\vec{q}^{\,T}(t)dt+(-1)^s\frac{\vec{\mathcal{H}}_2^{\,T}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right)$.

Из соотношений (3.43), (3.26) с учетом представления (3.42) вытекают равенства

$$\operatorname*{\mathbf{res}}_{\boldsymbol{\lambda_0}}\left(\boldsymbol{y(x,\lambda)}\right)=-\vec{\widetilde{\mathcal{H}}}_2^{\,T}(x,\lambda_0)\cdot\ \vec{u}_0(\vec{v}_0^{\,T}\cdot\vec{\omega}), \tag{3.44}$$

$$\operatorname*{\mathbf{res}}_{\boldsymbol{\lambda_0}}\left(\vec{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\lambda})\right)=-\vec{u}_0(\vec{v}_0^{\,T}\cdot\vec{\omega})+\int_0^1 y_0(t,\lambda_0)\vec{u}_0\left(\vec{v}_0^{\,T}\cdot\vec{Q}(t)\ \right)dt+$$

$$-\int_0^1\vec{\widetilde{\mathcal{H}}}_2^{\,T}(t,\lambda_0)\cdot\vec{u}_0(\vec{v}_0^{\,T}\cdot\vec{\omega})\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_l)}\vec{u}_l\left(\vec{v}_l^{\,T}\cdot\vec{Q}(t)\ \right)dt+ \tag{3.45}$$

$$-\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_l)}\int_0^1\left(\vec{\widetilde{\mathcal{H}}}_2^{\,T}(t,\lambda_0)\cdot\vec{u}_l\right)(\vec{v}_l^{\,T}\cdot\vec{\omega}\ )\cdot\vec{u}_0\left(\vec{v}_0^{\,T}\cdot\vec{Q}(t)\ \right)dt$$

$$+(-1)^s\frac{1}{\Delta(\lambda_0)}\int_0^1\mathcal{H}_1(0,\tau,\lambda_0)f(\tau)d\tau\cdot\vec{u}_0\left(\vec{v}_0^{\,T}\cdot\vec{A}_1\ \right)$$

$$-\vec{\widetilde{\mathcal{H}}}_2^T(0,\lambda_0)\cdot\vec{u}_0(\vec{v}_0^T\cdot\vec{\omega})\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_l)}\vec{u}_l\big(\vec{v}_l^T\cdot\vec{A}_1\big)-$$

$$-\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_l)}\Big(\vec{\widetilde{\mathcal{H}}}_2^T(0,\lambda_0)\cdot\vec{u}_l\Big)(\vec{v}_l^T\cdot\vec{\omega})\cdot\vec{u}_0\big(\vec{v}_0^T\cdot\vec{A}_1\big)$$

$$+y_0(1,\lambda_0)\vec{u}_0\big(\vec{v}_0^T\cdot\vec{A}_2\big)-\vec{\widetilde{\mathcal{H}}}_2^T(1,\lambda_0)\cdot\vec{u}_0(\vec{v}_0^T\cdot\vec{\omega})\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_l)}\vec{u}_l\big(\vec{v}_l^T\cdot\vec{A}_2\big)-$$

$$-\sum_{l=1}^{s-1}\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_l)}\Big(\vec{\widetilde{\mathcal{H}}}_2^T(1,\lambda_0)\cdot\vec{u}_l\Big)(\vec{v}_l^T\cdot\vec{\omega})\cdot\vec{u}_0\big(\vec{v}_0^T\cdot\vec{A}_1\big),$$

где $y_0(t,\lambda_0)=-\int_0^t g(t,\tau,\lambda_0)f(\tau)d\tau+(-1)^s\frac{1}{\Delta(\lambda_0)}\int_0^1\mathcal{H}_1(t,\tau,\lambda_0)f(\tau)d\tau$.

Таким образом, если вектор $\begin{pmatrix}\operatorname{res}\limits_{\lambda_0} y(x,\lambda)\\ \operatorname{res}\limits_{\lambda_0}\vec{\mu}(\lambda)\end{pmatrix}\neq 0$, то $\begin{pmatrix}\operatorname{res}\limits_{\lambda_0} y(x,\lambda)\\ \operatorname{res}\limits_{\lambda_0}\vec{\mu}(\lambda)\end{pmatrix}$ является собственным вектором задачи (3.9) и (3.10), который соответствует собственному значению λ_0. Заметим, что $f(x)$ и $\vec{\omega}$ можно выбирать произвольным образом в пространстве $L_2(0,1)\times\mathbb{C}^s$. Пусть $f(x)\equiv 0$ и $\vec{\omega}=\vec{u}_0$. Тогда из соотношений (3.44) и (3.45) получим вид собственного вектора

$$\vec{\Psi}_1(x,\lambda_0)=\begin{pmatrix}-\vec{\widetilde{\mathcal{H}}}_2^T(x,\lambda_0)\cdot\vec{u}_0,\\ -\vec{u}_0+\sum_{l=1}^{s-1}\tilde{\Xi}_l\,\vec{u}_l\end{pmatrix},$$

где $\tilde{\Xi}_l=-\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_l)}\int_0^1\int_0^t g(t,\tau,\lambda_0)\vec{q}^T(\tau)d\tau\cdot\vec{u}_0\big(\vec{v}_l^T\cdot\vec{Q}(t)\big)dt+$

$$+\frac{(-1)^{s+1}}{(\lambda_0-\lambda_l)}\int_0^1\frac{\vec{\mathcal{H}}_2^T(t,\lambda_0)}{\Delta(\lambda_0)}\cdot\vec{u}_0\big(\vec{v}_l^T\cdot\vec{Q}(t)\big)dt+$$

$$+\frac{(-1)^{s+1}}{(\lambda_0-\lambda_l)}\frac{\vec{\mathcal{H}}_2^T(0,\lambda_0)}{\Delta(\lambda_0)}\cdot\vec{u}_0\big(\vec{v}_l^T\cdot\vec{A}_1\big)-$$

$$-\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_l)}\int_0^1 g(1,\tau,\lambda_0)\vec{q}^T(\tau)d\tau\cdot\vec{u}_0\big(\vec{v}_l^T\cdot\vec{A}_2\big)+$$

$$+\frac{(-1)^{s+1}}{(\lambda_0-\lambda_l)}\frac{\vec{\mathcal{H}}_2^T(1,\lambda_0)}{\Delta(\lambda_0)}\cdot\vec{u}_0\left(\vec{v}_l^T\cdot\vec{A}_2\right).$$

Так как λ_0-нулевое простое собственное значение задачи (3.9) и (3.10), то собственный вектор определяемый формулами (3.44) и (3.45) коллениарен вектору $\vec{\Psi}_1(x,\lambda_0)$. Поэтому существует V константа пропорциональности, удовлетворяющая соотношению

$$\begin{pmatrix}\operatorname{res}\limits_{\lambda_0} y(x,\lambda)\\ \operatorname{res}\limits_{\lambda_0}\vec{\mu}(\lambda)\end{pmatrix}=V\cdot\vec{\Psi}_1(x,\lambda_0).$$

Константа пропорциональности V зависит только от вектора $\vec{\omega}$, что следует из соотношения (3.44). Иначе говоря, верно равенство

$$V=\vec{v}_0^T\cdot\vec{\omega},$$

или $V=\int_0^1 f(\tau)\cdot 0\,d\tau+(\vec{v}_0^T\cdot\vec{\omega})$.

Отсюда следует, что собственный вектор сопряженной задачи к задаче (3.9), (3.10) при всех $\tau\in[0,1]$

$$\vec{Z}_1^{\,T}(\tau,\lambda_0)=(0\quad\vec{v}_0^T).$$

Итак, нами выписаны собственные вектора (3.9) и (3.10), и сопряженной к ней задачи при $\lambda=\lambda_0$-простом полюсе ее резольвенты. В случае кратных полюсов резольвенты можно аналогичными рассуждениями получить цепочку собственной и присоединненных векторов. Подобные вычисления в случае чисто дифференциальных операторов можно найти в работе [81].

3.10. Пример 6 (продолжение примера 4). Представление собсвенных векторов в случае распадения оператора на дифференциальный и матричный операторы.

Рассмотрим задачу (3.27), (3.28). В этом случае ($p(\lambda_0)=0$, $p'(\lambda_0)\neq 0$, $\Delta(\lambda_0)\neq 0$) собственный вектор соответствующий простому собственному значению λ_0 примет вид

$$\vec{\Psi}_1(x,\lambda_0)=\begin{pmatrix}0\\ -\vec{u}_0\end{pmatrix},$$

а собственный вектор сопряженной задачи к задаче (3.9), (3.10) имеет вид

$$\vec{Z}_1^{\,T}(\xi,\lambda_0) = (0 \quad \vec{v}_0^T),$$

где $\vec{u}_0$-собственный вектор матрицы P и он соответствует собственному значению λ_0. Вектор $\vec{v}_0$ является собственным вектором сопряженной матрицы P^*.

Во втором случае ($\Delta(\lambda_0) = 0, \Delta'(\lambda_0) \neq 0, p(\lambda_0) \neq 0$):

$$\vec{\Psi}_1(x,\lambda_0) = \begin{pmatrix} \tilde{\varkappa}_1(x,\lambda_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{Z}_1(\xi,\lambda_0) = \begin{pmatrix} z_1(\xi,\lambda_0) \\ 0 \end{pmatrix},$$

здесь $\tilde{\varkappa}_1(x,\lambda_0) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & 0 \\ b_{11} & 1 & b_{12} \\ b_{21} - y_1'(1) & y_2'(1) & b_{22} \end{vmatrix}$,

$z_1(\xi,\lambda_0) = \tilde{V} \cdot \big(g(1,\xi,\lambda_0) + g'(1,\xi,\lambda_0)\big)$ и $\tilde{V}$ заданные константы.

3.11. О базисности Рисса в пространстве $L_2(0,1)$.

В данном пункте рассмотрим следующую самосопряженную задачу на собственные значения

$$\begin{cases} l(y;\,\vec{\mu}) \equiv r(y) + \varphi_1(x)y(0) + \varphi_2(x)y(1) + \langle \vec{\mu}, \vec{q}(x)\rangle = \lambda y(x), \\ \vec{\theta}(y;\,\vec{\mu}) \equiv \mathrm{P}\,\vec{\mu} + \int_0^1 \vec{q}(t)y(t)dt + y(0)\overrightarrow{A_1} + y(1)\overrightarrow{A_2} = \lambda\vec{\mu}, \end{cases} \tag{3.46}$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} V_1(y,\vec{\mu}) \equiv y'(0) + y(0)\beta_{11} + y(1)\beta_{12} + \int_0^1 y(t)\varphi_1(t)dt + \vec{A}_1^T\vec{\mu} = 0, \\ V_2(y,\vec{\mu}) \equiv y'(1) - y(0)\beta_{12} + y(1)\beta_{22} - \int_0^1 y(t)\varphi_2(t)dt - \vec{A}_2^T\vec{\mu} = 0. \end{cases} \tag{3.47}$$

Здесь $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \vec{q}(x), \overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{22}$ принимают только вещественные значения. Больше того считаем, что P-самосопряженная матрица. Согласно теореме 3.3 спектр рассматриваемой задачи состоит из нормальных собственных значений. Из теории самосопряженных операторов следует, что все собственные значения вещественные. Больше того, система собственных функций рассматриваемой задачи является ортогональным базисом в пространстве $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$. Обозначим через $\{\lambda_n, n \geq 1\}$ последовательность собственных значений рассматриваемой

самосопряженной задачи. Эта задача имеет ортонормированный базис собственных векторов

$$\vec{\Psi}_n(x) = \begin{pmatrix} y_n(x) \\ \vec{\mu}_n \end{pmatrix}.$$

В дальнейшим считаем, что полином $p(\lambda)$ и характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ имеют только простые нули. Дополнительно предположим, что множества нулей полинома $p(\lambda)$ и целой функций $\Delta(\lambda)$ не пересекаются. В таком случае в предыдущем пункте вычислены собственные вектора $\vec{\Psi}_n(x), n \geq 1$.

Выберем некоторое числа $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_s$ и введем квадратную матрицу

$$M(n_1, n_2, \dots, n_s) = \left[\vec{\mu}_{n_1} \quad \vec{\mu}_{n_2} \quad \dots \quad \vec{\mu}_{n_s}\right].$$

Нас интересует вопрос: когда система функций $\{y_n(x),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\}$ будет базисом Рисса в пространстве $L_2(0,1)$?

Теорема 3.4. Последовательность $\{y_n(x),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\}$ является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,1)$ тогда и только тогда, когда матрица $M(n_1, n_2, \dots, n_s)$ обратима.

В примере 6 в качестве $n_1 < n_2 < \cdots < n_s$надо выбирать те номера, которые соответствуют нулям многочлена $p(\lambda)$. Тогда система функций $\{\tilde{x}_1(x, \lambda_n),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\}$ согласно теореме 3.4 является базисом в пространстве $L_2(0,1)$, так как в этом случае матрица

$$M(n_1, n_2, \dots, n_s) = \left[\vec{u}_{n_1}, \quad \vec{u}_{n_2}, \quad \dots \quad \vec{u}_{n_s}\right]$$

обратима. Действительно, в этом случае вектора $\vec{u}_{n_1}$, $\vec{u}_{n_2}$, ... $\vec{u}_{n_s}$ являются линейно независимыми векторами матрицы P.

Доказательство теоремы 3.4 основано на одном замечаний И.М. Гельфанда, которое приведено в работе [82]. Приведем утверждение Гельфанда.

Утверждение 1. [82]. Для того, чтобы базис $e_1, e_2, \dots$ был базисом Рисса необходимо и достаточно, чтобы в основном гильбертовом пространстве H существовало скалярное произведение $\langle x, y \rangle$ эквивалентное исходному, относительно которого данная последовательность становится

ортонормированным базисом. Доказательство утверждения 1 можно найти в работе [83, теорема 1.9].

Для доказательства теоремы 3.4 мы построим новое скалярное произведение в $L_2(0,1)$, которое эквивалентно к исходному скалярному произведению в $L_2(0,1)$.

Сначала предположим, что система $\{y_n(x),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Надо доказать, что в этом случае квадратная матрица $M(n_1, n_2, \dots, n_s)$ является обратимой. Предположим противное утверждение: $det\, M(n_1, n_2, \dots, n_s) = 0$. Тогда $\{\vec{\mu}_{n_1} \quad \vec{\mu}_{n_2} \quad \dots \quad \vec{\mu}_{n_s}\}$ система векторов линейно зависима, то есть

$$\alpha_{n_1} \cdot \vec{\mu}_{n_1} + \alpha_{n_2} \cdot \vec{\mu}_{n_2} + \cdots + \alpha_{n_s} \cdot \vec{\mu}_{n_s} = 0$$

при некотором ненулевом наборе чисел $\{\alpha_{n_1},\ \alpha_{n_2}, \dots, \alpha_{n_s}\}$. Используем указанный набор чисел для того, чтобы построить функцию

$$y(x) = \alpha_{n_1} \cdot y_{n_1}(x) + \alpha_{n_2} \cdot y_{n_2}(x) + \cdots + \alpha_{n_s} \cdot y_{n_s}(x).$$

Заметим $y(x)$-ненулевая функция, так как $\left\{\begin{pmatrix} y_n(x) \\ \vec{\mu}_k \end{pmatrix} : k = n_1, n_2, \dots, n_s\right\}$ система ортогональная и среди них нет нулевых элементов. Больше того рассмотрим скалярное произведение $y(x)$ и $y_n(x)$.

$$\int_0^1 \overline{y(x)} y_n(x) dx = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{n_k} \left\langle \begin{pmatrix} y_n(x) \\ \vec{\mu}_n \end{pmatrix}; \overline{\begin{pmatrix} y_{n_k}(x) \\ \vec{\mu}_{n_k} \end{pmatrix}} \right\rangle_{L_2(0,1)\times\mathbb{C}^s} = 0, n \neq n_1, n_2, \dots, n_s,$$

Так как $\sum_{k=1}^{s} \alpha_{n_k} \vec{\mu}_{n_k} = \vec{0}$. Таким образом, ненулевая функция $y(x)$ ортогонально в $L_2(0,1)$ системе $\{y_n(x),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\}$. Отсюда следует, что система $\{y_n(x),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\}$ не является полной в пространстве $L_2(0,1)$. Последнее противоречит её базисности.

Теперь докажем обратное утверждение: если квадратная матрица $M(n_1, n_2, \dots, n_s)$ является обратимой матрицей, то система $\{y_n(x),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\}$ является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Построим обратимый оператор A, который систему $\{y_n(x),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\}$ переводит в ортогональную систему

$$\left\{\begin{pmatrix} y_n(x) \\ \vec{\mu}_n \end{pmatrix},\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\right\}.$$

Для этого возьмем произвольную функцию $y(x) \in L_2(0,1)$. По функции $y(x)$ построим вектор $\vec{\mu} \in \mathbb{C}^s$ по формуле

$$\vec{\mu}(n_1, n_2, \dots, n_s) = -[M^*(n_1, n_2, \dots, n_s)]^{-1} \cdot \vec{N},$$

где $\vec{N}^T = \left[\int_0^1 y(x)\overline{y_{n_1}(x)}dx\,, \int_0^1 y(x)\overline{y_{n_2}(x)}dx\,, \dots, \int_0^1 y(x)\overline{y_{n_s}(x)}dx\right]^T$.

Затем образуем вектор

$$\vec{Y}(n_1, n_2, \dots, n_s) = \begin{pmatrix} y(x) \\ \vec{\mu}(n_1, n_2, \dots, n_s) \end{pmatrix}.$$

Теперь введем оператор A, который каждому вектору $y(x) \in L_2(0,1)$ ставит в соответствие вектор $\vec{Y}(n_1, n_2, \dots, n_s) \in L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$. Убедимся, что при $n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1$ справедливо равенства

$$Ay_n(x) = \begin{pmatrix} y_n(x) \\ \vec{\mu}_n \end{pmatrix}.$$

Пусть $y(x) = y_n(x)$ при $n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1$. Вычислим

$$\vec{\mu}_n(n_1, n_2, \dots, n_s) = -[M^*(n_1, n_2, \dots, n_s)]^{-1} \cdot N_n, \tag{3.48}$$

где ${N_n}^T = \left[\int_0^1 y_n(x)\overline{y_{n_1}(x)}dx\,, \int_0^1 y_n(x)\overline{y_{n_2}(x)}dx\,, \dots, \int_0^1 y_n(x)\overline{y_{n_s}(x)}dx\right]^T$.

Так как при $k = 1, 2, \dots, s$ числа

$$\int_0^1 y_n(x)\overline{y_{n_k}(x)}dx = -\langle \vec{\mu}_n, \vec{\mu}_{n_k} \rangle_{\mathbb{C}^s},$$

тогда матрично-векторное равенство (3.48) перепишется в виде

$$M^*(n_1, n_2, \dots, n_s)\vec{\mu}_n(n_1, n_2, \dots, n_s) = \begin{bmatrix} \langle \vec{\mu}_n, \vec{\mu}_{n_1} \rangle_{\mathbb{C}^s} \\ \langle \vec{\mu}_n, \vec{\mu}_{n_2} \rangle_{\mathbb{C}^s} \\ \vdots \\ \langle \vec{\mu}_n, \vec{\mu}_{n_s} \rangle_{\mathbb{C}^s} \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

Из матрично-векторного соотношения (3.49) вытекает, что

$$\vec{\mu}_n(n_1, n_2, \dots, n_s) = \vec{\mu}_n, n \neq n_1, n_2, \dots, n_s.$$

Таким образом, оператор A переводит систему $\{y_n(x),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\}$ в ортогональную систему $\left\{\begin{pmatrix} y_n(x) \\ \vec{\mu}_n \end{pmatrix},\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\right\}$. Для $\forall y, z \in L_2(0,1)$ определим новое скалярное произведение по формуле $\langle y, z\rangle_{new} = \langle Ay, Az\rangle_{L_2(0,1)\times C^s}$. Теперь покажем, что новые скалярное произведение в $L_2(0,1)$ эквивалентно исходному. Рассмотрим квадрат нормы и оценим его снизу

$$\|y\|^2_{new} = \langle y, y\rangle_{new} = \int_0^1 |y(x)|^2 dx + \vec{\mu}^*(n_1, \dots, n_s)\vec{\mu}(n_1, \dots, n_s) \geq \int_0^1 |y(x)|^2 dx = \|y\|^2_{L_2(0,1)}, \quad (3.50)$$

где $\vec{\mu}^* = \overline{(\vec{\mu}^T)}$. Теперь квадрат нормы оценим сверху

$\|y\|^2_{new} = \int_0^1 |y(x)|^2 dx + \vec{\mu}^*(n_1, \dots, n_s)\vec{\mu}(n_1, \dots, n_s)$. Так как

$$\vec{\mu}^*(n_1, \dots, n_s)\vec{\mu}(n_1, \dots, n_s) = \langle \vec{\mu}(n_1, \dots, n_s), \vec{\mu}(n_1, \dots, n_s)\rangle_{\mathbb{C}^s} = \langle [M^*(n_1, \dots, n_s)]^{-1}N; [M^*(n_1, \dots, n_s)]^{-1}N\rangle \leq C \cdot \|N\|^2_{\mathbb{C}^s},$$

где C −некоторая положительная величина, не зависящая от $y(x)$. Таким образом, имеем неравенство

$$\|\vec{\mu}(n_1, \dots, n_s)\|^2_{\mathbb{C}^s} \leq \mathrm{C} \sum_{k=1}^{s} \left|\langle y, y_{n_K}\rangle_{L_2(0,1)}\right|^2 \leq C\|y\|^2 \cdot \sum_{k=1}^{s} \left\|y_{n_K}\right\|^2_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда

$$\|y\|^2_{new} \leq \|y\|^2 \left(1 + \mathrm{C} \sum_{k=1}^{s} \left\|y_{n_K}\right\|^2_{L_2(0,1)}\right). \quad (3.51)$$

Неравенства (3.50) и (3.51) показывают, что новая норма эквивалентна норме $L_2(0,1)$. Теперь покажем, что в новой норме система $\{y_n(x),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s\}$ полна в $L_2(0,1)$. Пусть $\exists y(x) \in L_2(0,1)$ такая, что $\langle y, y_n\rangle_{new} = 0$ при $\forall\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s$. Тогда вектор $\vec{Y}(n_1, n_2, \dots, n_s) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \cdot \begin{pmatrix} y_{n_K}(x) \\ \vec{\mu}_{n_k} \end{pmatrix}$ при некоторых α_k. С другой стороны, вектор

$$\vec{Y}(n_1, n_2, \dots, n_s) = \begin{pmatrix} y(x) \\ \vec{\mu}(n_1, \dots, n_s) \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k\, y_{n_k}(x) = y(x),$$

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \vec{\mu}_{n_k} = -[M^*(n_1, \dots, n_s)]^{-1} N,$$

где $N^T = \left[\int_0^1 y(x)\,\overline{y_{n_1}(x)}dx, \dots, \int_0^1 y(x)\,\overline{y_{n_s}(x)}dx\right]$.

Следовательно, имеем

$$\sum_{k=1}^{s} \alpha_k \vec{\mu}_{n_k} = -[M^*(n_1, \dots, n_s)]^{-1} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \overrightarrow{\theta_k} + \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \vec{\mu}_{n_k}, \qquad (3.52)$$

где $\overrightarrow{\theta_k}^T = \left[\int_0^1 y_{n_k}(x)\,\overline{y_{n_1}(x)}dx, \dots, \int_0^1 y_{n_k}(x)\,\overline{y_{n_k}(x)}dx\right]$.

Вспомним, что при $k \neq j$ имеем

$$\int_0^1 y_{n_k}(x)\,\overline{y_{n_j}(x)}dx = -\langle \vec{\mu}_{n_k}, \vec{\mu}_{n_j} \rangle_{\mathbb{C}^s}.$$

Отсюда и из соотношения (3.52) вытекает, что $\alpha_k = 0$ при $k = 1, \dots, s$. Следовательно, $y(x) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k y_{n_k}(x) = 0$. Полнота системы $\{y_n(x),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s,\}$ в $L_2(0,1)$ доказана.

Очевидно, что оператор A на множестве значений $Ran(A)$ обратим. Поэтому согласно определению базиса Рисса система $\{y_n(x),\ n \neq n_1, n_2, \dots, n_s, n \geq 1\}$ образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

4. Заключение

В данной диссертационной работе рассмотрено спектральный анализ дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами. В первой главе было получено ответ на следующий вопрос: сколько и какие надо добавить условия к исходному уравнению, чтобы полученная задача в специальном пространстве имела единственное решение? Также была найдена (формула (1.21)) структура обратного оператора полученной краевой задачи. А во второй главе рассмотрено эквивалентные дополнительные условия поставленной краевой задачи. В третьем главе выделен класс самосопряженных дифференциально-алгебраических операторов с граничными членами. Также исследована аналитическая природа резольвенты такого оператора. Выписаны представления собственных векторов исходного оператора, которые представляют ортогональный базис в пространстве $L_2(0,1) \times \mathbb{C}^s$. Система собственных векторов спроектирована на подпространстве $L_2(0,1)$. Оказалось, что спроектированная система в пространстве $L_2(0,1)$ становится базисом Рисса только после удаления из нее конечного числа функций. Указан критерий, который указывает какие функций следует удалять из спроектированной системы, для базисности оставшейся части. Приведены результаты, касающиеся гладкого случая. То есть результаты сформулированы для случая, когда $h_i \in W_2^1[0,1]$ при $i = 1, \dots, k$ и $q_j \in W_2^1[0,1]$ при $j = 1, \dots, s$, а граничные формы $U_1(\cdot), \dots, U_k(\cdot)$ выбраны в виде (1.2).

Интерес представляет случай негладкого набора функций $\{h_1(\cdot), \dots, h_k(\cdot)\}$ и $\{q_1(\cdot), \dots, q_s(\cdot)\}$. В этом случае надо привлекать понятие квазипроизводной. Понятие квазипроизводной широко применяется в монографиях [47, 84]. Указанному случаю негладких функций $h_1(\cdot), \dots, h_k(\cdot)$ и $q_1(\cdot), \dots, q_s(\cdot)$ соискатель планирует посвятить отдельную работу.

5. Приложения.

Приложение А. В теореме 2.1 используются следующие информации:

Введем обозначения

$$A_1 = \left(-\sum_{m=1}^{s} (b_m + d_m)\mathcal{H}_{4m} - (\alpha_1 + \gamma_1)\mathcal{H}_{04} + (\alpha_2 + \gamma_2)\mathcal{H}_{40} + \sum_{i=1}^{k} (\beta_{i1} + \beta_{i2})\mathcal{H}_{i4} \right);$$

$$A_2 = \left(-\sum_{m=1}^{s} (b_m + d_m)\mathcal{H}_{5m} + (\alpha_1 + \gamma_1)\mathcal{H}_{05} - (\alpha_2 + \gamma_2)\mathcal{H}_{50} + \sum_{i=1}^{k} (\beta_{i1} + \beta_{i2})\mathcal{H}_{i5} \right);$$

$$A_3 = \left(-\sum_{m=1}^{s} (b_m + d_m)\mathcal{H}_{(s+i)m} - (\alpha_1 + \gamma_1)\mathcal{H}_{0(s+i)} + (\alpha_2 + \gamma_2)\mathcal{H}_{(s+i)0} + \sum_{i_1=1}^{k} (\beta_{i_1 1} + \beta_{i_1 2})\mathcal{H}_{i_1(s+i)} \right);$$

$$A_4 = \left(-\sum_{m=1}^{s} (b_m + d_m)\mathcal{H}_{jm} - (\alpha_1 + \gamma_1)\mathcal{H}_{0j} + (\alpha_2 + \gamma_2)\mathcal{H}_{j0} + \sum_{i=1}^{k} (\beta_{i1} + \beta_{i2})\mathcal{H}_{ij} \right).$$

$$\mathcal{H}_{s+i}(\vec{\omega}) = \sum_{m=1}^{s} \omega_m \mathcal{H}_{(s+i)m};\ i = 1, \dots, k.$$

$$\mathcal{H}_j(\vec{\omega}) = \sum_{m=1}^{s} \omega_m \mathcal{H}_{jm};\ j = 1, \dots, s.$$

$$\mathcal{H}_0(\vec{\omega}) = \sum_{m=1}^{s} \omega_m \mathcal{H}_{m1};$$

$$\mathcal{H}_{11}(\vec{\omega}) = \sum_{m=1}^{s} \omega_m \mathcal{H}_{m2};$$

где, $\mathcal{H}_0(\vec{\omega}) -$ определитель матрицы, полученной заменой $(s + k + 1)$ −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{\omega}$, а $\mathcal{H}_{11}(\vec{\omega}) -$ определитель матрицы, полученной заменой $(s + k + 2)$ −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{\omega}$, $\mathcal{H}_{(s+i)}(\vec{\omega})$ −определитель матрицы, полученной заменой $(s + i)$ −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{\omega}$, а через $\mathcal{H}_j(\vec{\omega})$ −обозначим определитель

матрицы, полученной заменой j −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{\omega}$, при $\Delta = det\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix} \neq 0$.

$\mathcal{H}_4(\tilde{f})-$ определитель матрицы, полученной заменой $(s+k+1)$ −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{b}_1$, а через $\mathcal{H}_5(\tilde{f})$ −обозначим определитель матрицы, полученной заменой $(s+k+2)$ −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{b}_1$,

$\mathcal{H}_{s+i}(\tilde{f})-$ определитель матрицы, полученной заменой $(s+i)$ −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{b}_1$, $\mathcal{H}_j(\tilde{f})$ −определитель матрицы, полученной заменой j −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{b}_1$, при $\Delta = det\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix} \neq 0$;

здесь, определитель $\mathcal{H}_{m1}$ возникает при разложении определителя $\mathcal{H}_0(\vec{\omega})$ по столбцу $(s+k+1)$; $m = 1, \dots, s$;

определитель $\mathcal{H}_{m2}$ возникает при разложении определителя $\mathcal{H}_{11}(\vec{\omega})$ по столбцу $(s+k+2)$; $m = 1, \dots, s$;

определитель $\mathcal{H}_{(s+i)m}$ возникает при разложении определителя $\mathcal{H}_{s+i}(\vec{\omega})$ по столбцу $(s+i)$; $m = 1, \dots, s$; $i = 1, \dots, k$;

определитель $\mathcal{H}_{jm}$ возникает при разложении определителя $\mathcal{H}_j(\vec{\omega})$ по столбцу j; $m = 1, \dots, s$; $j = 1, \dots, s$;

определители $\mathcal{H}_{4m}, \mathcal{H}_{i4}, \mathcal{H}_{04}, \mathcal{H}_{40}$ возникают при разложении определителя $\mathcal{H}_4(\tilde{f})$ по столбцу $(s+k+1)$; $m = 1, \dots, s$; $i = 1, \dots, k$;

определители $\mathcal{H}_{5m}, \mathcal{H}_{i5}, \mathcal{H}_{05}, \mathcal{H}_{50}$ возникают при разложении определителя $\mathcal{H}_5(\tilde{f})$ по столбцу $(s+k+2)$; $m = 1, \dots, s$; $i = 1, \dots, k$;

определители $\mathcal{H}_{(s+i)m}, \mathcal{H}_{0(s+i)}, \mathcal{H}_{(s+i)0}, \mathcal{H}_{i_1(s+i)}$ возникают при разложении определителя $\mathcal{H}_{s+i}(\tilde{f})$ по столбцу $(s+i)$; $m = 1, \dots, s$; $i = 1, \dots, k$;

определители $\mathcal{H}_{jm}, \mathcal{H}_{ij}, \mathcal{H}_{0j}, \mathcal{H}_{j0}$ возникают при разложении определителя $\mathcal{H}_j(\tilde{f})$ по столбцу j; $m = 1, \dots, s$; $i = 1, \dots, k$;

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -V_1(\tilde{f}) \\ \vdots \\ -V_1(\tilde{f}) \\ -U_1(\tilde{f}) \\ \vdots \\ -U_k(\tilde{f}) \\ -V_2(\tilde{f}) \\ -V_3(\tilde{f}) \end{bmatrix}, \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Приложение В.

Информации про матрицу $\begin{bmatrix} A \\ \\ C_0 \end{bmatrix}$.

Перепишем уравнение (2.10) в виде:

$$y(x) = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x) + \tilde{f}(x) - \sum_{i=1}^{k} U_i(y)\,\widetilde{H_i}(x) - \sum_{j=1}^{s} \mu_j \widetilde{Q_J}(x), \quad (2.15)$$

где,

$$\tilde{f}(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} f(t)dt,$$

$$\widetilde{H_i}(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} H_i(t)dt,$$

$$\widetilde{Q_J}(x) = \int_0^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} Q_i(t)dt.$$

Подставим второе уравнение из системы (2.1), а также дополнительные условия (2.3) в уравнение (2.15):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{s} a_{mj}\mu_j + \tilde{C}_1 V_1(y_1) + \tilde{C}_2 V_1(y_2) + V_1(\tilde{f}) - \sum_{i=1}^{k} U_i(y) V_1\left(\widetilde{H_i}\right) - \sum_{j_1=1}^{s} \mu_{j_1} V_1(\widetilde{Q_{j_1}}) = \omega_m, m = 1, \dots, s; \\ U_p(y) = \tilde{C}_1 U_p(y_1) + \tilde{C}_2 U_p(y_2) + U_p(\tilde{f}) - \sum_{i=1}^{k} U_i(y)\, U_p\left(\widetilde{H_i}(x)\right) - \sum_{j_1=1}^{s} \mu_{j_1}\, U_p\left(\widetilde{Q_{j_1}}(x)\right), p = 1, \dots, k; \\ 0 = \tilde{C}_1 V_2(y_1) + \tilde{C}_2 V_2(y_2) + V_2(\tilde{f}) - \sum_{i=1}^{k} U_i(y) V_2\left(\widetilde{H_i}\right) - \sum_{j_1=1}^{s} \mu_{j_1} V_2(\widetilde{Q_{j_1}}); \\ 0 = \tilde{C}_1 V_3(y_1) + \tilde{C}_2 V_3(\square\square_2) + V_3(\tilde{f}) - \sum_{i=1}^{k} U_i(y) V_3\left(\widetilde{H_i}\right) - \sum_{j_1=1}^{s} \mu_{j_1} V_3(\widetilde{Q_{j_1}}); \end{cases} \tag{2.16}$$

где,
$$V_1(y) = b_m y(1) + c_m y(0) + d_m \frac{dy(1)}{dx} + e_m \frac{dy(0)}{dx};$$

$$V_2(y) = \alpha_1 y(1) + \beta_1 y(0) + \gamma_1 \frac{dy(1)}{dx} + \delta_1 \frac{dy(0)}{dx};$$

$$V_3(y) = \alpha_2 y(1) + \beta_2 y(0) + \gamma_2 \frac{dy(1)}{dx} + \delta_2 \frac{dy(0)}{dx}.$$

Распишем систему (2.16) в матрично-векторной форме

$$\begin{bmatrix} a_{11} - V_1(\widetilde{Q_1}) & \dots & a_{1s} - V_1(\widetilde{Q_s}) & -V_1(\widetilde{H_1}) & \dots & -V_1(\widetilde{H_k}) & V_1(y_1) & V_1(y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} - V_1(\widetilde{Q_1}) & \dots & a_{ss} - V_1(\widetilde{Q_s}) & -V_1(\widetilde{H_1}) & \dots & -V_1(\widetilde{H_k}) & V_1(y_1) & V_1(y_2) \\ -U_1(\widetilde{Q_1}) & \dots & -U_1(\widetilde{Q_s}) & -U_1(\widetilde{H_1}) - 1 & \dots & -U_1(\widetilde{H_k}) & U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -U_k(\widetilde{Q_1}) & \dots & -U_k(\widetilde{Q_s}) & -U_k(\widetilde{H_1}) & \dots & -U_k(\widetilde{H_k}) - 1 & U_k(y_1) & U_k(y_2) \\ -V_2(\widetilde{Q_1}) & \dots & -V_2(\widetilde{Q_s}) & -V_2(\widetilde{H_1}) & \dots & -V_2(\widetilde{H_k}) & V_2(y_1) & V_2(y_2) \\ -V_3(\widetilde{Q_1}) & \dots & -V_3(\widetilde{Q_s}) & -V_3(\widetilde{H_1}) & \dots & -V_3(\widetilde{H_k}) & V_3(y_1) & V_3(y_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_s \\ U_1(y) \\ \vdots \\ U_k(y) \\ \tilde{C}_1 \\ \widetilde{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 - V_1(\tilde{f}) \\ \vdots \\ \omega_s - V_1(\tilde{f}) \\ -U_1(\tilde{f}) \\ \vdots \\ -U_k(\tilde{f}) \\ -V_2(\tilde{f}) \\ -V_3(\tilde{f}) \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Соответственно, если введем обозначения, тогда в общем случае вместо системы (2.17) получим систему вида

$$\begin{bmatrix} A \\ C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

где, $\vec{Y} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_s \\ U_1(y) \\ \vdots \\ U_k(y) \\ \tilde{C}_1 \\ \widetilde{C_2} \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} \omega_1 - V_1(\tilde{f}) \\ \vdots \\ \omega_s - V_1(\tilde{f}) \\ -U_1(\tilde{f}) \\ \vdots \\ -U_k(\tilde{f}) \\ -V_2(\tilde{f}) \\ -V_3(\tilde{f}) \end{bmatrix}$.

Приложение С.

В теореме 2.2 используются следующие информации:

где, $\mathcal{H}_1(\vec{p})$ −определитель матрицы, полученной заменой $(s+k+1)$ −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$, а через $\mathcal{H}_2(\vec{p})$ −обозначим определитель матрицы, полученной заменой $(s+k+2)$ −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{p}$, $\mathcal{H}_{(s+i)}(\vec{p})$ −определитель матрицы, полученной заменой $(s+i)$ −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{p}$, а через $\mathcal{H}_j(\vec{p})$ −обозначим определитель матрицы, полученной заменой j −го столбца матрицы $\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix}$ на вектор $\vec{p}$, при $\Delta = det\begin{pmatrix} A \\ C_0 \end{pmatrix} \neq 0$. Обозначим через

$$\mathcal{H}_1(\vec{p}) = p_1 \cdot \mathcal{H}_{01} + p_2 \cdot \mathcal{H}_{10};$$

$$\mathcal{H}_2(\vec{p}) = p_1 \cdot \mathcal{H}_{02} + p_2 \cdot \mathcal{H}_{20};$$

$$\mathcal{H}_{(s+i)}(\vec{p}) = p_1 \cdot \mathcal{H}_{(s+i)2} + p_2 \cdot \mathcal{H}_{(s+i)3};\ i = 1, \dots, k.$$

$$\mathcal{H}_j(\vec{p}) = p_1 \cdot \mathcal{H}_{j2} + p_2 \cdot \mathcal{H}_{j3};\ j = 1, \dots, s.$$

Список использованных источников

1. Gear C.W. Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations. *IEEE Trans. Circuit Theory CT*, 18(1), (1971): 89–95.

2. Gear C.W. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. *Prentice Hall, Upper Saddle River*, (1971).

3. Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. The Numerical Solution of Initial Value Problems in Ordinary Differential-Algebraic Equations. *SIAM, Philadelphia* (1996).

4. Günther M., Feldmann U. CAD based electric circuit modeling in industry I: mathematical structure and index of network equations. *Surv. Math. Ind.* 8, (1999): 97–129.

5. Griepentrog E., März R. Differential-Algebraic Equations and Their Numerical Treatment. *Teubner-Texte zur Mathematik, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig* (1986).

6. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential Algebraic Problems. *Springer, Berlin* (1996).

7. Lamour R., März R., Tischendorf C. Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. Differential-Algebraic Equations Forum. *Springer, Berlin* (2013).

8. Rabier P., Rheinboldt W. Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations. In: Ciarlet, P., Lions, J. (eds.) Handbook of Numerical Analysis, vol. VIII. *Elsevier, Amsterdam* (2002).

9. Zwart H., Mehrmann V. Abstract Dissipative Hamiltonian Differential-Algebraic Equations Are Everywhere. *DAE Panel, 2,* (2024).

10. Campbell S., Ilchmann A. Mehrmann, V.; Reis, T. Applications of Differential-Algebraic Equations: Examples and Benchmarks. *Springer Cham, Switzerland,* (2019).

11. Arnold M., Simeon B. Pantograph and catenary dynamics: a benchmark problem and its numerical solution. *Appl. Numer. Math.* 34 (2000), 345–362.

12. Ascher U.M., Weiss R. Collocation for singular perturbation problems II: Linear first order systems without turning points. *Math. Comp.* 43 (1984), 157–187.

13. G*ü*nther M. A joint DAE/PDE model for interconnected electrical networks. *Math. Comp. Mod. of Dyn. Syst.* **6** (2000), 114–128.

14. Simeon B. MBSPACK — numerical integration software for constrained mechanical motion. *Surv. Math. Ind.* **5** (1995), 169–202.

15. Kunkel P., Mehrmann V., Rath W. Analysis and numerical solution of control problems in descriptor form. *Math. Control, Signals, Sys.* **14** (2001), 29–61.
16. Pinho M.D., Vinter R. B. Necessary conditions for optimal control problems involving nonlinear differential algebraic equations. *J. Math. Anal. Appl.* 212 (1997): 493–516.

17. Balla K, Kurina G.A., März R. Index criteria for differential algebraic equations arising from linear-quadratic optimal control problems, *J. Dyn. Control Syst.* 12 (2006): 289-311.
18. O'Malley R. E. Introduction to singular perturbations. *Academic Press, New York,* (1974).
19. Walter R. E. Gewöhnliche differentialgleichungen. *4th edn., Springer-Verlag, Berlin, Germany,* (1990).
20. Günther M., U. Feldmann. The DAE-index in electric circuit simulation, *Math. Comp. Simul.* 39 (1995): 573-582.
21. Kunkel P., Mehrmann V. Differential-Algebraic Equations–Analysis and Numerical Solution. *EMS Publishing House, Zürich* (2006).

22. Kunkel P., Mehrmann V. Analysis of over-and underdetermined nonlinear differential-algebraic systems with application to nonlinear control problems, *Math. Control Signals Syst.* 14 (2001) 233-256.
23. Kunkel P., Mehrmann V. Local and global canonical forms for differential-algebraic equations with symmetries. *Vietnam J. Mathematics* 51 (2023), 177–198.
24. Kunkel P., Mehrmann V. Differential-Algebraic Equations. Analysis and Numerical Solution. *2nd.: EMS Press, Berlin* (2024).
25. Hilb E., Über Reihentwicklungen, welche aus speciallen Randwertproblemen bei gewohnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichungen entspringen, *J. Reine Angew. Math.* 140 (1911), 205-229.
26. Phillips R. S., Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 90 (1959), 193-254.
27. Dezin A. A. Differential Operator Equations: A Method of Model Operators in the Theory of Boundary Value Problems. *Proc. Steklov Inst. Math.,* 229 (2000), 1–161.
28. Krall A. M. Differential-boundary operators. *Transactions of the American mathematical society* 154 (1971): 429-458.

29. Krall A. M. Stieltjes differential-boundary Operators. *Pacific journal of mathematics,* 55 (1974), 207-218.
30. Krall A. M. The development of general differential and general differential-boundary systems. *Rocky mountain journal of mathematics,* 5 (1975), 493-542.
31. Krall A. M. Differential Operators with Abstract Boundary Conditions. *Canadian Journal of Mathematics,* 23 (1971): 642–664.
32. Krall, A. M. General Differential Operators. *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* 1(1970): 85–99.
33. Krall, A. M. Linear Differential Equations with Boundary Conditions. *Boston: Pitman.* (1981).
34. Ascher U., Mattheij R., Russell R. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. *Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ* (1988).
35. Biyarov B.N. Similar transformation of one class of well-defined restrictions. *Eurasian Mathematical Journal* 16, (1). (2025): 08-21.
36. Lamour R., März R, Weinmüller E. Boundary-value Problems for Differential-Algebraic Equations: A Survey. *In Surveys in Differential-Algebraic Equations III. Springer, Cham.* (2015) 177-309.
37. Kalachev L. V., O'Malley R. E., Robert E. Boundary value problems for differential-algebraic equations**.** *Numerical Functional Analysis and Optimization.* 16(1995):363-378.
38. März R. On Difference and Shooting Methods for Boundary Value Problems in Differential-Algebraic Equations. *ZAMM.* 64(11) (1984): 463-473.
39. März R. On boundary value problems in differential-algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation.* 31 (1989): 517-537.
40. März R. On linear differential-algebraic equations and linearizations. *Applied Numerical Mathematics.* 18(1995): 267-292.
41. Lentini M., März R. The conditioning of boundary value problems in transferable differential-algebraic equations. *SIAM journal on numerical analysis.* 27(4) (1990) 1001-1015.
42. Anh P. K. Multipoint boundary-value problems for transferable differential-algebraic equations. I–linear case. *Vietnam J. of Mathematics*. 25(4) (1997): 347–358.
43. März R., Riaza R. Linear differential-algebraic equations with properly stated leading term: A-critical points. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems.* 13(3) (2007): 291-314.
44. März R., Riaza R. Linear differential-algebraic equations with properly stated leading term: B-critical points. Dynamical Systems. 23(4) (2008): 505-522.
45. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для операторных дифференциальных уравнений. *Киев: Наукова думка*, (1984).

46. Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I. “Boundary Value Problems for Operator-Differential Equations and Their Spectral Properties.” *Ukrainian Mathematical Journal,* 45(1993): 1400–1416.
47. Naimark M.A. *Linear differential operators, part 2*. *Harrap, London*, (1968).
48. Садовничий В. А., Кангужин Б. Е. “О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями”, *Докл. АН СССР*, 267:2 (1982), 310–313.
49. Kanguzhin B. E. “Green’s Function of the Dirichlet Problem for the Differential Operator on a Star-Shaped Graph.” *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science,* 97(2018): 67–90.
50. Кангужин Б. Е. “Операторы, резольвенты которых имеют сверточное представление, и их спектральный анализ”, *Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 153 (2018): 94–107.
51. Кангужин Б. Е. Восстановление двухточечных граничных условий по конечному набору собственных значений краевых задач для дифференциальных уравнений высших порядков, *Уфимск. матем. журн.*, (2020): 22–29.
52. Kanguzhin B. E. “Propagation of nonsmooth waves under singular perturbations of the wave equation”, *Eurasian Math. J.*, 13:3 (2022), 41–50.
53. Kanguzhin B. E. “Propagation of nonsmooth waves along a star graph with fixed boundary vertices”, *Eurasian Math. J.*, 16:4 (2025), 45–53.
54. Kanguzhin B. E., Zhapsarbaeva L., Madibaiuly Zh., “Lagrange formula for differential operators and self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree”, *Eurasian Math. J.*, 10:1 (2019), 16–29.
55. Кангужин, Б. Е., Аипенова А. С., Жамалбекова А. А. «Всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами». *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science* 69, № 2. (2011): 44–51.
56. Шаймерденова, А К, Тлеулесова А М, Темирбекова Л. Н. “Корректная разрешимость неоднородных систем линейных алгебраических уравнений при правых частях из подпространств”. *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science* 69 (2), 2011:58-62.
57. Pavlov, B. S. *Extension theory and explicitly solvable models*. Russian Mathematical Surveys**,** Vol. 42, No. 6 (258), 1987, pp. 99–131.
58. Vishik, M. I. On general boundary problems for elliptic differential equations. *Tr. Mosk. Mat. Obs.* **1** (1952), 187–246.
59. Kokebayev, B. K.; Otelbaev, M.; Shynybekov, A. N. On questions of extension and restriction of operators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 271 (1983), no. 6, 1307–1310.

60. Burenkov V. I., Otelbaev, M. Comparison of the singular numbers of correct restrictions of elliptic differential operators. *Tr. Mosk. Mat. Obs*. 75 (2014): 139–157.
61. Otelbaev, M.; Shynybekov, A. N. Well-posed problems of Bitsadze-Samarskiĭ type. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 265(1982): 815–819.
62. Burenkov V. I., Otelbaev, M. On the singular numbers of correct restrictions of non-selfadjoint elliptic differential operators. Eurasian Math. J. 2 (2011), no. 1, 145–148.
63. M. Muratbekov, M. Otelbaev, "On the existence of a resolvent and separability for a class of singular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain", *Eurasian Math. J.*, 7:1 (2016), 50–67.
64. Kasymov, K. A.; Dauylbaev, M. K. Singularly perturbed linear integrodifferential equations with initial jumps of arbitrary order. *Russian Math. (Iz. VUZ)* 47 (2003): 70–74.
65. Касымов К. А., Дауылбаев М. К. "Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений", *Дифференц. уравнения*, 35:6 (1999), 822–830.
66. Dzhumabayev, D. S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.* 29:1 (1989), 34–46.
67. Assanova A. T., Dzhumabayev D. S. "Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 402:1 (2013), 167-178.
68. Assanova A.T. "Initial boundary value problem for partial differential-algebraic equations with parameter", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 48:5 (2025), 6180-6190.
69. Assanova A.T. "An integral-boundary value problem for a partial differential equation of second order", *Turkish Journal of Mathematics*, 43:4 (2019), 1967-1978.
70. Assanova A. T. "On a solvability to the problem with parameter for differential-algebraic equations", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 45:2 (2024), 604–612.
71. Berger T., Reis T. "Controllability of Linear Differential-Algebraic Systems — A Survey." In *Surveys in Differential-Algebraic Equations I*. Springer, Berlin/Heidelberg, (2013).
72. Artykbayeva Zh., Kanguzhin B."Differential–boundary equations with algebraic terms and associated boundary value problems." *Carpathian Journal of Mathematics.* 41 (4), (2025): 899–912.

73. Artykbayeva, Zh., Kanguzhin, B. “Differential-algebraic equations with boundary terms.” *International Journal of Mathematics and Physics*, *16*(1), (2025): 61-72.
74. Barseghyan, V.R. “The control problem for a system of linear loaded differential equations with nonseparated multi-point intermediate conditions.” The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 21, (2017): 19–32.
75. Guliyev N.J. “Schrödinger operators with distributional potentials and boundary conditions dependent on the eigenvalue parameter.” *J. Math. Phys.* 60(6), (2019): 23 pp.
76. Guliyev N. J. " Essentially Isospectral Transformations and Their Applications." *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 199(4), (2020): 1621–1648.
77. Guliyev N. J. "Inverse Square Singularities and Eigenparameter-Dependent Boundary Conditions Are Two Sides of the Same Coin." *The Quarterly Journal of Mathematics*. 74, (2023). 889–910.
78. Guliyev N. J. "A Riesz Basis Criterion for Schrödinger Operators with Boundary Conditions Dependent on the Eigenvalue Parameter." *Analysis and Mathematical Physics* 10(2), (2020): 1–13.
79. Guliyev N. J. " On two-spectra inverse problems." *Proceedings of the American Mathematical Society*, 148(10), (2020): 4491–4502.
80. Dauletbay B. N. "Spectral theorem in the form of M.V. Keldysh for an arbitrary linear operator in a finite-dimensional space." *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science* 3(107), (2020): 12–20.
81. Keldysh M. V., "On the completeness of eigenfunctions of certain classes of non-selfadjoint linear operators." *Advances in mathematical Sciences*. 51(2), (1971): 15-41.
82. Gel’fand, I.M. Remark on the work of N. K. Bari, Biorthogonal systems and bases in Hilbert space. Moskov. Gos. Univ. Uˇcenye Zapiski Matematika 148(4), (1951): 224–225.
83. Young, R.M. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series.* Academic Press, Inc., San Diego, (2001).
84. Atkinson, F.V. *Discrete and continuous boundary value problems.* Academic Press, New York and London, (1964).
85. Artykbayeva Zh.N., Mirzakulova A.E., Assilkhan A.A. “Analytical solution of initial value problem for ordinary differential equation with singular perturbation and piecewise constant argument.” *Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science* 122, (2). (2024): 1-13.
86. Artykbayeva Zh.N., Mirzakulova A.E. “Long-term analysis of solutions with initial jumps in singularly perturbed equations.” *International Journal of*

Mathematics and Physics 15, (2). (2024): 110-118.

87. Artykbayeva, Zh., Kanguzhin, B. “Self-Adjoint Differential-Algebraic Operators With Boundary Terms.” *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (2026):1–26.
88. Artykbayeva Zh.N., Mirzakulova A.E. “Asymptotic behavior of the solution of a boundary value problem with an initial jump for a singularly perturbed an integro-differential equation”. *Традиционная международная апрельская научная конференция в честь Казахстанского Дня работников Науки*. Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2023. С.124.
89. Artykbayeva Zh.N. “Multi-point boundary problems”. *“Уфимская осенняя математическая школа—2024” международная конференция.* Уфа: Уфимский Университет, 2024. С. 14.
90. Artykbayeva Zh.N. “Asymptotic analysis of singularly perturbed integro-differential equations with initial jump”. *Международная научная конференция студентов и молодых ученых “Фараби Алеми”.* Алматы: КазНУ имени аль-Фараби, 2024. С. 5.
91. Artykbayeva Zh.N., Kanguzhin B.E. “Differential-boundary equations with unknown algebraic terms”. *“Актуальные проблемы математики, физики и информационных технологий в образовании” международная научно-практическая конференция*. Ош: Ошский Государственный Университет, 2024. С. 68.
92. Artykbayeva Zh.N. “Boundary value problems in differential equations with algebraic terms”. *Seventh International Conference on Analysis and Applied Mathematics.* Antalya: 2024. С. 90.
93. Artykbayeva Zh.N., Kanguzhin B.E. “Riesz basis for differential-algebraic equations with boundary terms”. *International Conference FAIA*. Antalya, 2025. С. 53.
94. Artykbayeva Zh.N., Kanguzhin B.E. “Differential-boundary equations with algebraic terms”. *International conference “Actual problems of analysis, differential equations and algebra” dedicated to the 15th anniversary of the Eurasian Mathematical Journal.* Astana: ЕНУ имени Л.Н. Гумилева, 2025. С.81.
95. Artykbayeva Zh.N., Kanguzhin B.E. “On Riesz basis for differential-algebraic equations with boundary terms”. 15th ISAAC Congress. Astana: Nazarbayev University, 2025. С.112.
96. Artykbayeva Zh.N., Kanguzhin B.E. “Multipoint boundary value problems in DAE”. *Традиционная международная апрельская научная конференция в*

честь Казахстанского дня работников науки. Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2025. С. 141.
97. Artykbayeva Zh.N., Kanguzhin B.E. “Differential-boundary equations with algebraic terms”. *Международная научная конференция “Актуальные вопросы междисциплинарных научных исследований”.* Караганда: Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, 2025. С. 36.
98. Artykbayeva Zh.N. “Self-adjoint differential–algebraic operators”. *Trends in Analysis and Differential Equations.* Turkistan: Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, 2026. С. 73.